# Beitrag zur Theorie der natürlichen Blende optischer Instrumente.

---

## Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

**Hohen Philosophischen Fakultät**

der

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

**Universität Rostock**

vorgelegt von

**Willy Hinrichs**
aus Berlin

---

Berlin 1910
Emil Ebering.
Mittelstraße 39.

Referent: Professor Dr. R. H. Weber.

Tag der mündlichen Prüfung: 3. Februar 1910.

Meinen lieben Eltern

in Dankbarkeit zugeeignet.

# Inhaltsverzeichnis.

**Einleitung.**

**Kapitel I. Die natürliche Blende in Bezug auf eine halbkugelförmige Konvexplanlinse unter Voraussetzung endlicher Strahlenneigungen zur Achse.**

§ 1. Die kaustische Kurve einer halbkugelförmigen Konvexplanlinse.
§ 2. Bedingungen für die Spitze der Kaustik.
§ 3. Die Spitze der Kaustik für die beiden Fälle $\varphi = 0^0$ und $\varphi = 5^0$
§ 4. Die angenäherte Bedingungsgleichung für die Spitze der Kaustik.
§ 5. Ort der natürlichen Blende für verschiedene Strahlenneigungen.

**Kapitel II. Die natürliche Blende bei einem beliebigen brechenden System.**

§ 1. Formeln zur Durchrechnung eines Strahles im Parachsialgebiet.
§ 2. Formeln zur Durchrechnung eines Meridionalbündels.
§ 3. Die Koma und die Bedingung der Komafreiheit.
§ 4. Umformung der Bedingung für die Komafreiheit auf Parachsialstrahlen.
§ 5. Transformation der Invarianten $n_k\ i_k$.
§ 6. Die Seidel'schen Sätze über Nullinvarianten.
§ 7. Bestimmung des Ortes der natürlichen Blende im Objektraum.
§ 8. Ein einfaches Beispiel.

**Kapitel III. Anwendung der Theorie der natürlichen Blende auf spezielle Fälle.**

§ 1. Die dünne in Luft befindliche Linse.
§ 2. System aus zwei dünnen Linsen im Abstande e voneinander.
§ 3. Das Huygens'sche und das Ramsden'sche Okular.
§ 4. Das symmetrische Doublet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551526_0117

## Einleitung.

Das Bild, das ein optisches System von einem Objekt erzeugt, wird im allgemeinen mit sehr verschiedenartigen dioptrischen Fehlern behaftet sein. Die wichtigsten dieser Mängel sind: sphärische und chromatische Aberration, Astigmatismus, Koma und Verzeichnung. Je nach dem Zweck, dem das optische System dienen soll, wird man das Hauptaugenmerk auf Beseitigung des einen oder des andern Fehlers richten; immer aber ist es erforderlich, sich bei der Neukonstruktion eines optischen Systems Rechenschaft von der Beschaffenheit des Bildes zu geben und eventl. durch geeignete Aenderung der Konstanten die gewünschte Genauigkeit zu erreichen. Um Kenntnis von der Beschaffenheit eines optischen Bildes zu gewinnen, verfuhr man bisher so, dass man eine Anzahl Hauptstrahlen trigonometrisch durchrechnete unter ziemlich willkürlicher Annahme des Ortes der Aparturblende, denn die Theorie der Eintritts- und Austrittspupille liefert nicht den geringsten Anhalt dafür, welcher Punkt auf der optischen Achse als Mittelpunkt der Aparturblende anzunehmen ist. Für die Anbringung der Blende liess man sich vielmehr von zwei mehr äusserlichen Gesichtspunkten leiten, die Blende sollte nur dazu dienen, die von einem Punkt ausgehende Strahlenmenge und die äusserste Neigung der in Betracht kommenden Strahlen zu bestimmen. Es lässt sich leicht einsehen, zu welchen Irrtümern die willkürliche Wahl des Blendenortes und damit auch der Hauptstrahlen führen musste.

Von einem Punkt P (Fig. 1) aus fallen im Hauptschnitt die einander unendlich nahen Strahlen I, II, III, IV unter endlicher Neigung zur optischen Achse L auf ein brechendes System S. Nach der Brechung mögen sich die Strahlen I′ und II′ in a, II′ und III′ in b, III′ und IV′ in c schneiden. Die drei Punkte a, b, c bilden dann bekanntlich eine

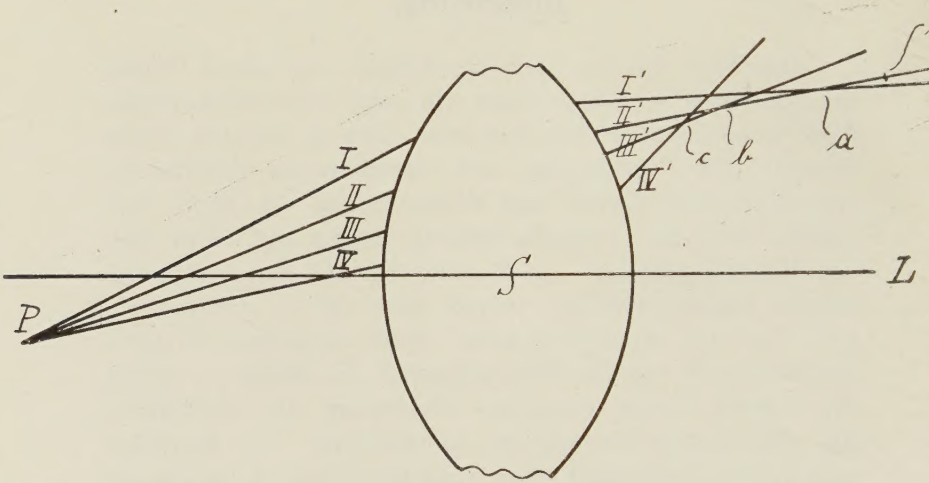


Fig. 1

Koma, d. h. ein Stück einer kaustischen Kurve. Die Strahlenvereinigung in den Punkten a, b, c ist nur von geringer Ordnung, da sich nur zwei Strahlen in einem Punkt schneiden, und infolgedessen optisch wenig wirksam. Die Gesamtheit aller der von P ausgehenden Strahlen weist jedoch nach der Brechung an einer Stelle eine Vereinigung höherer Ordnung auf; die Strahlen bilden an dieser Stelle eine kaustische Spitze, indem sich nicht nur zwei sondern drei Strahlen in einem Punkt streng vereinigen. Diese Stelle, die also frei von Koma ist, muss als Aequivalent des Bildes von P angesprochen werden.

Einer der von P ausgehenden unendlich vielen Strahlen

hat nun die Eigenschaft, nach der Brechung durch diesen Punkt höherer Strahlenvereinigung zu gehen. Dieser „Träger der kaustischen Spitze“ muss als eigentlicher Hauptstrahl angesehen werden. Um jedoch keinen Irrtümern ausgesetzt zu sein — man definiert den Hauptstrahl gewöhnlich anders — nennen wir diesen Strahl, der durch die Spitze der Kaustik geht, nach Herrn Gleichen[1] „Fundamentalstrahl“.

Will man nun die Beschaffenheit eines optischen Bildes untersuchen und rechnet zu diesem Zweck wie es bisher geschah einen beliebigem Strahl (z. B. Strahl III Fig. 1) durch das System durch, so erhält man schliesslich einen meridionalen und einen sagittalen Bildpunkt (b und b′ Fig. 1). Bestimmt man so für jede Strahlenneigung den meridionalen und sagittalen Bildpunkt, so bildet die Gesamtheit aller dieser Punkte zwei astigmatische Flächen, eine meridionale ASB (Fig. 2) und eine sagittale $A_1SB_1$. Die beiden Flächen würden jedoch nur unter der Voraussetzung zustande kommen, dass sich im Kreuzungspunkt der Strahlen eine unendlich enge Blende befindet. Bei weiter geöffneten Blenden, wie sie in der Praxis zur Anwendung kommen, spielen diese Flächen eine ganz untergeordnete optische Rolle; es machen sich jetzt vielmehr die Spitzen der Kaustiken mit ihren höheren Strahlenvereinigungen geltend. Die Annahme, dass die beiden astigmatischen Flächen ASB und $A_1SB_1$ Aufschluss über den Zustand des Bildes geben, ist mithin ganz willkürlich und ungerechtfertigt. Will man wirklich Einsicht in die Beschaffenheit des Bildes gewinnen, so gibt es nur einen Weg. Man darf zur Durchrechnung nicht beliebige Strahlen benutzen, sondern nur solche, die nach der Brechung durch die Spitzen der Kaustiken gehen, d. h. Fundamentalstrahlen. Damit ist aber gegeben, dass die

1. A. Gleichen, Vorlesungen über photographische Optik p. 146.

Lage der Blende jetzt nicht mehr willkürlich sein darf. Die Blende muss vielmehr an der Stelle stehen, an der die Fundamentalstrahlen die optische Achse schneiden. Diesen Punkt nennen wir nach Herrn Gleichen[1] „Mittelpunkt der natürlichen Blende“; er möge im folgendem mit dem Symbol [M. B.] bezeichnet werden.

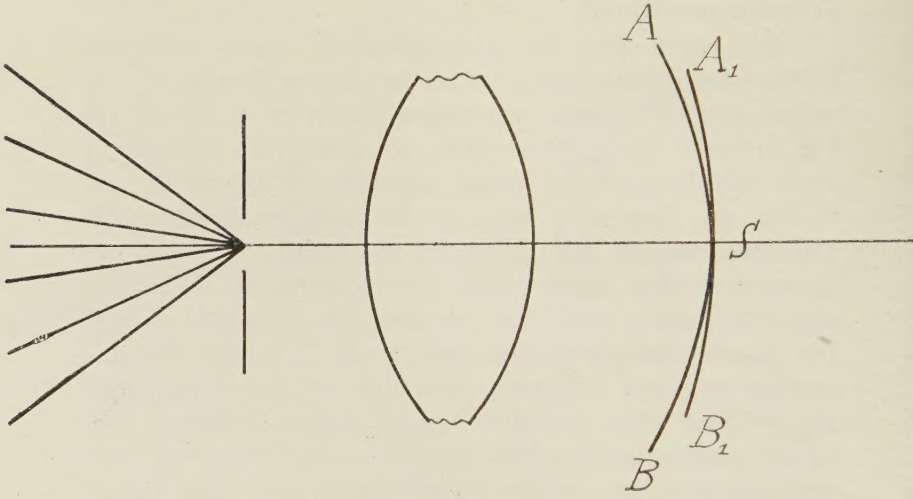


Fig. 2

Die oben geschilderten Verhältnisse sollen noch an einem einfachen Beispiel[2] näher erläutert werden. In Fig. 3 denken wir uns eine Plankonvexlinse dargestellt, die dem Licht ihre plane Seite zuwendet. Unter endlicher Neigung zur optischen Achse ll mögen parallele Strahlen auf die Linse fallen. Sie werden zunächst an der planen Fläche gebrochen, behalten aber die Eigenschaft bei, unter einander parallel zu sein. Die so gebrochenen Strahlen werden an der hinteren Linsenfläche, die den Krümmungs-

2. Das Beispiel ist mit Erlaubnis des Herrn Verfassers entnommen aus A. Gleichen, Vorlesungen über pho ogr. Optik p. 144 u. ff.

mittelpunkt M hat, zum zweiten Male gebrochen. Beschränken wir uns auf den Hauptschnitt, so ist klar, dass derjenige Strahl Träger der kaustischen Spitze sein muss, der die Kugelfläche ungebrochen durchdringt, der also durch den Mittelpunkt M geht. Um den Fundamentalstrahl

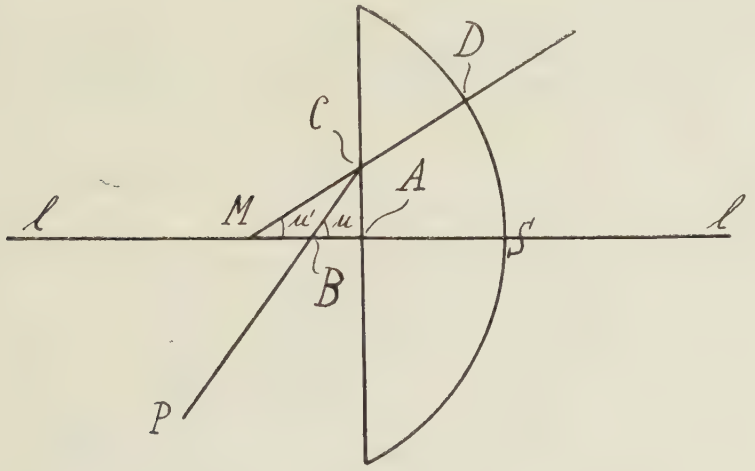


Fig. 3

zu finden, brauchen wir also von allen auf die Linse fallenden Strahlen nur denjenigen zu ermitteln, der nach der Brechung an der Planfläche durch den Mittelpunkt M der zweiten brechenden Fläche geht. In Fig. 3 sei PC dieser Fundamentalstrahl, der also nach der Brechung in Richtung MD verläuft, wo MD = r der Radius der zweiten durch S gehenden Linsenfläche ist.

Es sei: $MS = MD = r$, $AS = d$, $AB = x_1$, $AC = h$

$\sphericalangle ABC = u$, $\sphericalangle AMC = u'$

dann folgt aus Fig. 3

$$tgu = \frac{h}{x_1} \ , \ tgu' = \frac{h}{r - d}$$

Also: $$\frac{\text{tg}u'}{\text{tg}u} = \frac{x_1}{r-d}$$

Folglich:

$$x_1 = (r-d)\frac{\text{tg}u'}{\text{tg}u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Nach dem Brechungsgesetz von Snellius ist nun

$$\sin u = n \sin u', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wenn n der Brechungsexponent der Linsensubstanz ist. Gleichung (2) kann man auch in der Form schreiben:

$$\text{tg}u' = \frac{\sin u}{\sqrt{n^2 - \sin^2 u}}$$

Dann wird Gleichung (1):

$$x_1 = \frac{(r-d)\cos u}{\sqrt{n^2 - \sin^2 u}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ist also die Neigung der einfallenden Strahlen zur optischen Achse gegeben, so liefert Gleichung (3) die Entfernung des [M. B.] von der ersten brechenden Fläche. Unter Voraussetzung von Paraxialstrahlen geht Gleichung (3) über in:

$$x_1 = \frac{r-d}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Zu bemerken ist noch, dass sich bei der Plankonvexlinse der Ort des [M. B.] für stärkere Strahlenneigungen nur wenig verschiebt[1], sodass auch für stärkere Neigungen Gleichung (4) zugrunde gelegt werden kann.

In den Figuren 4, 5, 6 ist nun der astigmatische Korrektionszustand derselben Plankonvexlinse graphisch dargestellt, wie er sich ergibt, wenn man verschiedene Achsenpunkte als Kreuzungspunkte für die Hauptstrahlen wählt.

Die Konstruktionsdaten für die Linse sind:

$$d = 8{,}6 \ , \ r = -51{,}79^{3} \ n = 1{,}5179.$$

Die Brennweite der Linse ist 100.

Aus Gleichung (4) ergibt sich als Entfernung des [M. B.]

$$x_1 = 28{,}454.$$

Fig. 4 zeigt den Fall, dass die Hauptstrahlen durch den [M. B.] gehen, zur Abbildung und trigonometrischen Durchrechnung also Fundamentalstrahlen benutzt sind. Es

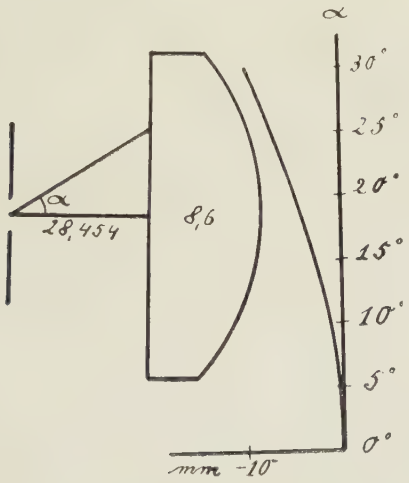


Fig. 4

ergibt sich, wie es sein muss, ein von Astigmatismus freies Bild.

Fig. 5 zeigt den Fall, dass die Hauptstrahlen durch den Schnittpunkt der optischen Achse mit der Planfläche gehen. Es ergeben sich zwei Bildflächen, von denen die meridionale gestrichelt, die sagittale ausgezogen ist. Wie

3. Das Minuszeichen bedeutet, dass die Fläche ihre konkave Seite dem einfallenden Lichte zuwendet.

schon oben erwähnt, würden sich diese Flächen nur dann zeigen, wenn eine unendlich enge Blende benutzt werden würde. Jene Flächen repräsentieren nur eine Anzahl von Bildpunkten von ganz geringer Strahlenvereinigung, wie

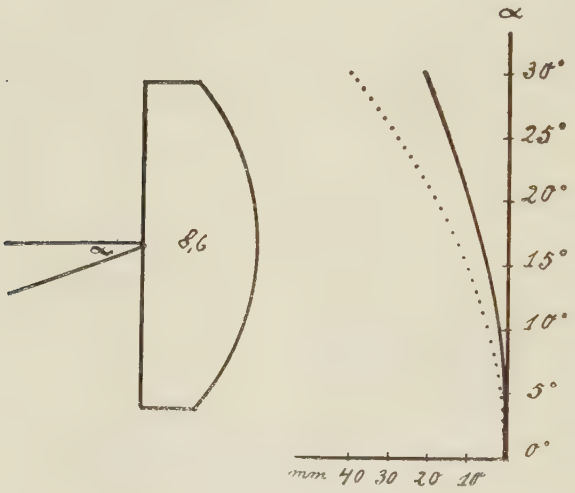


Fig. 5

sie sich abseits von den Spitzen in der weiteren Ausdehnung der Kaustiken zeigen. Bei weiter geöffneten Blenden ist von diesen Flächen keine Spur vorhanden. Es machen sich dann vielmehr die Kaustiken mit ihrer höheren Strahlenvereinigung geltend.

Fig. 6 endlich zeigt den Fall, dass eine Hinterblende verwendet wird. Die Trennung der beiden astigmatischen Bildflächen ist noch stärker, und der wirkliche Sachverhalt bei weiter geöffneten Systemen ist nicht annähernd dargestellt.

Dieses geradezu klassische Beispiel wird die Bedeutung der Fundamentalstrahlen zur Genüge dartun, und man ist

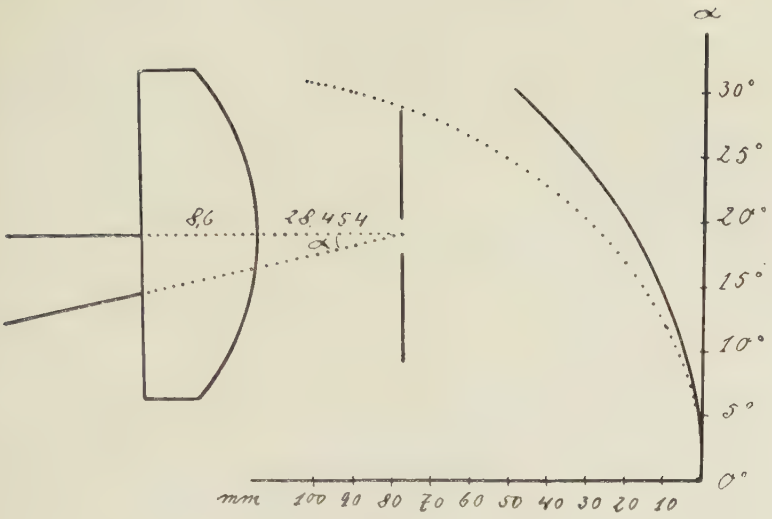


Fig. 6

genötigt, die Ergebnisse der trigonometrischen Durchrechnung eines Systems mit willkürlich angenommenem Blendenort mit grösster Vorsicht aufzunehmen, insbesondere dann, wenn es sich um unsymmetrische Systeme handelt, während man bei symmetrischen Systemen, wie es schon früher geschah, den Symmetriepunkt als Blendenort wählen kann — wenigstens unter gewissen Bedingungen[4], die aber in der Praxis meist erfüllt sind —, da bei symmetrischen Systemen der Symmetriepunkt annähernd mit dem [M. B.] übereinstimmt.

Aus Gleichung (3) geht hervor, dass im Falle einer Plankonvexlinse der Ort des [M. B.] abhängig ist von der Neigung der einfallenden Strahlen zur optischen Achse. Dasselbe muss man erwarten bei jedem beliebigen optischen System. Nur für den Fall, dass die Verschiebungen des [M. B.] innerhalb geringer Grenzen bleiben, kann die Theorie

4. Siehe Kap. III. § 4.

der natürlichen Blende Anspruch auf praktisches Interesse erheben.

Die allgemeine Entscheidung dieser Frage in Bezug auf ein beliebiges brechendes System muss infolge der unüberwindlichen mathematischen Schwierigkeiten unterbleiben; dagegen soll im folgenden die Aenderung der Lage des [M. B.] für den Fall einer halbkugelförmigen Konvexplanlinse festgestellt werden.

## Kapitel 1.

Die natürliche Blende in Bezug auf eine halbkugelförmige Konvexplanlinse unter Voraussetzung endlicher Strahlenneigungen zur Achse.

### § 1. Die kaustische Kurve einer halbkugelförmigen Konvexplanlinse.

Man denke sich eine halbkugelförmige Linse — siehe Fig. 7 — so in einem rechtwinkligen Koordinatensystem gelegen, dass der Mittelpunkt des Grundkreises mit dem Koordinatenanfangspunkt O und die Projektion des Grundkreises mit der Y-Achse zusammenfällt. Die konvexe Seite der Linse sei der Lichtquelle zugewendet.

Ein Lichtstrahl, der mit der optischen Achse den Winkel $\varphi$ bildet, möge die Linse in B treffen. Die Einfalls- bez. Brechungswinkel werden der Reihe nach mit $i_1$, $i_1'$, $i_2$, $i_2'$ bezeichnet. Bei C möge der gebrochene Strahl die Linse verlassen und jetzt mit der negativen X-Achse bei D den Winkel $\psi$ bilden. Die Gleichung des zweimal gebrochenen Strahles C D ist dann:

$$y = -\operatorname{tg}\psi \cdot x + b_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

wenn $b = OC$ ist.

Aus Fig. 7 folgt:

$$\psi = -i_2' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\frac{OC}{OB} = \frac{b}{r} = \frac{\sin i_1'}{\cos i_2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wenn r der Krümmungsradius der vorderen Linsenfläche ist.

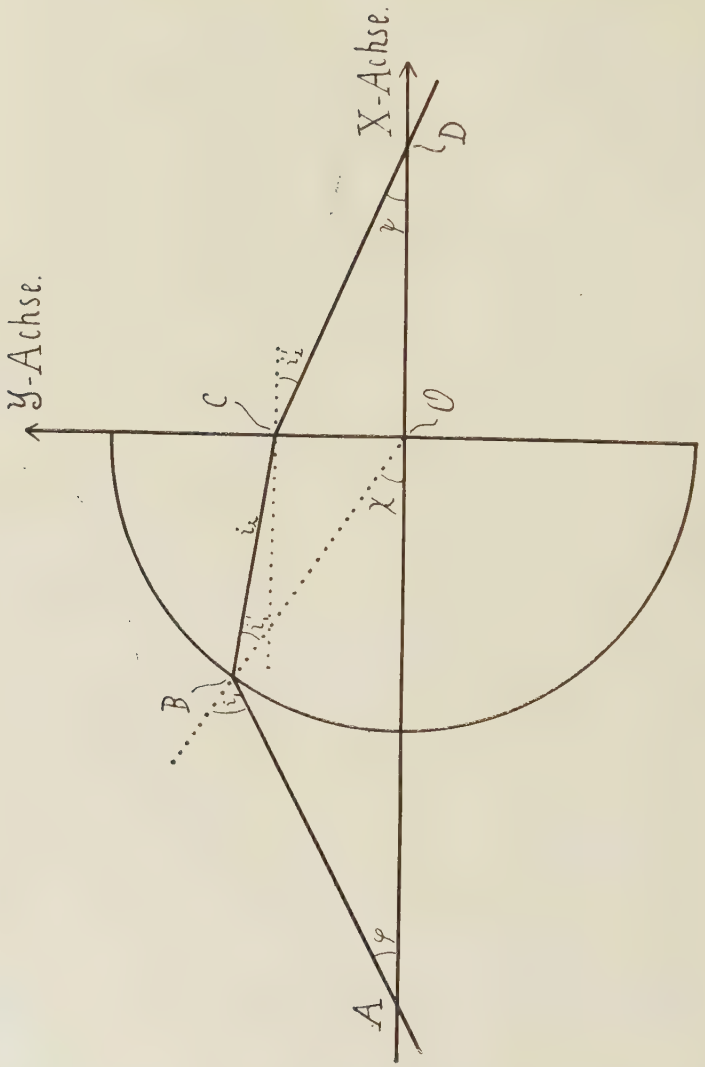


Fig. 7.

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (6) und (7) geht Gleichung (5) über in:

$$y - tgi_2' \cdot x - \frac{r \cdot \sin i_1'}{\cos i_2} = O.$$

Beachtet man jetzt, dass nach dem Brechungsgesetz von Snellius die Beziehung besteht:

$$\sin i_2' = n \cdot \sin i_2,$$

so wird die Gleichung des durch die Linse gebrochenen Strahles CD

$$y - \frac{n \cdot \sin i_2}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_2}} \cdot x - \frac{r \cdot \sin i_1'}{\cos i_2} = O \quad . \quad (8)$$

Fallen unendlich viele parallele Strahlen unter dem Winkel $\varphi$ auf die Linse, so bilden alle diese Strahlen nach ihrer Brechung durch die Linse, sofern man nur die in der X-Y-Ebene verlaufenden Strahlen in Betracht zieht, eine kaustische Kurve. Mathematisch ist die kaustische Kurve identisch mit der Einhüllenden des gebrochenen Strahles CD (Gleichung 8), wenn man $i_1'$ und $i_2$ als Parameter auffasst.

Die Ermittlung der Kaustik aus der Gleichung des gebrochenen Strahles kann auf sehr verchiedene Weise geschehen. Theoretisch ist es am einfachsten, einen Parameter z. B. $i_2$ fortzuschaffen, darauf die Gleichung nach dem andern Parameter $i_1'$ zu differentiieren und aus der so erhaltenen und der ursprünglichen Gleichung den Parameter $i_1'$ zu eliminieren.

Eine weitere Methode zur Berechnung der Kaustik ist die von Cayley[5]: „Enthält eine Kurve $U = O$ zwei voneinander unabhängige Parameter $\alpha$ und $\beta$, so erhält man die Gleichung der Einhüllenden durch Elimination von $\alpha$ und $\beta$ aus den Gleichungen:

$$U = O, \frac{\partial U}{\partial \alpha} = O, \frac{\partial U}{\partial \beta} = O. \quad "$$

---

5. Salmon: Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven.

Bei der Anwendung dieser Methode geht man am zweckmässigsten aus von der Gleichung:

$$y - \frac{n \sin\left[(i_1 - \frac{\varphi}{2}) - (i_1' + \frac{\varphi}{2})\right]}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2\left[(i_1 - \frac{\varphi}{2}) - (i_1' + \frac{\varphi}{2})\right]}} x - \frac{r \cdot \sin\left[(i_1 - \frac{\varphi}{2}) - (i_1' + \frac{\varphi}{2})\right]}{\cos\left[(i_1 - \frac{\varphi}{2}) - (i_1' + \frac{\varphi}{2})\right]} = 0,$$

eine Gleichung, die sich aus Gleichung (8) unmittelbar ergibt, wenn man die Winkelbeziehungen der Fig. 7 berücksichtigt. Die beiden unabhängigen Parameter sind

$$i_1 - \frac{\varphi}{2} \text{ und } i_1' + \frac{\varphi}{2}.$$

Eine dritte Methode ist die der elliptischen Funktionen, die Heath[6] auf den Fall anwendet, dass Lichtstrahlen parallel zur optischen Achse auf nur eine brechende Fläche fallen. Wendet man diese Methode auf die halbkugelförmige Linse an, so muss man ausgehen von der Gleichung:

$$y - \frac{n \cdot \sin(i_1 - i_1' - \varphi)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(i_1 - i_1' - \varphi)}} x - \frac{r \cdot \sin i_1'}{\cos(i_1 - i_1' - \varphi)} = 0,$$

eine Gleichung, die aus (8) unmittelbar folgt. Drückt man nun $i_1$ als elliptische Funktion aus, setzt also

$$i_1 = \text{am } u,$$

so wird, wenn $K = \frac{1}{n}$ ist:

---

6. Heath, Lehrbuch der geometrischen Optik.

$$\sin i_1 = \sin \text{ am } u$$
$$\cos i_1 = \cos \text{ am } u$$
$$\sin i_1' = K \,.\, \sin \text{ am } u$$
$$\cos i_1' = \Delta \text{ am } u.$$

Es ist jetzt also nur noch ein Parameter u in der Gleichung des gebrochenen Strahles vorhanden, und man muss also jetzt nach der ersten Methode fortfahren.

Eine wesentlich andere Methode wendet Cayley[7] auf den Fall an, dass Licht von einem Punkt in endlicher Entfernung ausgehend an einem Kreise gebrochen wird. Er berechnet die sog. sekundäre Kaustik, d. i. die orthogonale Trajektion des gebrochenen Strahles. Die Evolute dieser sekundären Kaustik ist dann die primäre Kaustik.

Alle diese Methoden liefern sehr komplizierte Ausdrücke, die für eine spätere numerische Auswertung vollständig ungeeignet sind. Besonders kompliziert wurden die Ausdrücke bei Anwendung der Methode der elliptischen Funktionen. Verfasser erhielt im allgemeinen Fall, dass die einfallenden Lichtstrahlen einen endlichen Winkel mit der optischen Achse bilden, eine Gleichung von ca. 1500 Gliedern, während sich diese Methode zur Bestimmung der Kaustik für den Fall, dass das Licht parallel zur optischen Achse einfällt, noch gut bewährte. Im letzteren Fall erhielt Verfasser als Gleichung der Kaustik in Parameterform:

$$\frac{\text{. K sin am u } (\Delta \text{ am u} + \text{K cos am u}) - \text{y } (\cos \text{ am u} + \text{K } \Delta \text{ am u})}{\text{cos am u . } \Delta \text{ am u } (\cos \text{ am u} + \text{K } \Delta \text{ am u})^2 + \text{r . K . K}'^4 \sin^3 \text{ am u}} =$$

$$\frac{\text{c}_1 - \text{c}_2 \sin^2 \text{ am u} + 2\text{K cos am u} \,.\, \Delta \text{ am u}}{\text{in}^2 \text{ am u } (\cos \text{ am u} + \text{K } \Delta \text{ am u}) (\text{c}_2 \cos \text{ am u } \Delta \text{ am u} + \text{KK}'^2)}$$

---

7. Memoire on Caustics, Phil. Trans. 1856.

$$\frac{y}{\sin \operatorname{am} u} + \frac{K'^2}{K(c_1 - c_2 \sin^2 \operatorname{am} u + 2K \cos \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u)^{1/2}} x = \frac{r \cdot K(\Delta \operatorname{am} u + K \cos \operatorname{am} u)}{\cos \operatorname{am} u + K \Delta \operatorname{am} u}$$

Hierin ist:

$$K'^2 = 1 - K^2$$
$$c_1 = 1 + K^2$$
$$c_2 = 2K^2 + n^2 K'^4$$

Am einfachsten führt die Methode zum Ziel, die sich auf folgenden Satz[5] gründet: „Enthält eine Kurve $U = O$ die beiden Parameter $p_1$ und $p_2$, die mittels der Gleichung $V = O$ in Beziehung zu einander stehen, so bilde man die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial p_1} & \frac{\partial U}{\partial p_2} \\ \frac{\partial V}{\partial p_1} & \frac{\partial V}{\partial p_2} \end{vmatrix}$$

Die Gleichung der Einhüllenden der Kurve $U = O$ erhält man dann durch Elimination der Parameter $p_1$ und $p_2$ aus den Gleichungen:

$$U = O$$
$$V = O$$
$$D = O.''$$

Im vorliegenden Fall ist die Kurve $U = O$ dargestellt durch die Gleichung (8).

Aus der Figur 7 folgt nun:

$$\chi = i_2 + i_1'$$
$$\chi = i_1 - \varphi$$

Folglich ergibt sich:

$$\sin (i_2 + i_1' + \varphi) = \sin i_1.$$

Nach dem Brechungsgesetz von Snellius ist:

$$\sin i_1 = n \cdot \sin i_1'.$$

Also folgt:

$$\sin (i_2 + i_1' + \varphi) - n \sin i_1' = O, \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

eine Gleichung, die der Beziehung $V = O$ entspricht. Schreibt man Gleichung (8) in der Form $U' = O$ und Gleichung (9) in der Form $V' = O$, so ergibt sich, da die beiden Parameter $i_1'$ und $i_2$ sind:

$$D' = \begin{vmatrix} \frac{\partial U'}{\partial i_1'} & \frac{\partial U'}{\partial i'_2} \\ \frac{\partial V'}{\partial i_1'} & \frac{\partial V'}{\partial i_2} \end{vmatrix} = O \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Es sollen nun die vier Ausdrücke $\frac{\partial U'}{\partial i_1'}$, $\frac{\partial U'}{\partial i_2}$, $\frac{\partial V'}{\partial i_1'}$, $\frac{\partial V'}{\partial i_2}$ berechnet werden:

Aus Gleichung (8) folgt nach einigen Umformungen:

$$\frac{\partial U'}{\partial i_1'} = - \frac{r \cdot \cos i_1'}{\cos i_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$\frac{\partial U'}{\partial i_2} = - \frac{n \cdot x \cdot \cos i_2}{(1 - n^2 \sin^2 i_2)^{3/2}} - \frac{r \cdot \sin i_1' \sin i_2}{\cos^2 i_2} \quad . \quad . \quad (12)$$

Ebenso folgt aus Gleichung (9)

$$\frac{\partial V'}{\partial i_1'} = \cos(i_2 + i_1' + \varphi) - n \cos i_1' \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$\frac{\partial V'}{\partial i_2} = \cos (i_2 + i_1' + \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Berücksichtigt man die Ausdrücke (11), (12), (13), (14), so nimmt Gleichung (6) nach einigen Umformungen die Gestalt an:

$$x_1 = -\frac{[r\cos(i_2 + i_1' + \varphi)\cos(i_2 + i_1')}{n \cdot \cos^3 i_2\,[n\,\cos\,i_1' - \cos(i_2 + i_1' + \varphi)]}$$
$$+\frac{r \cdot n \sin i_1' \cos i_1'\,\sin\,i_2]\,[1 - n^2 \sin^2 i_2]^{3/2}}{n \cdot \cos^3 i_2\,[n\,\cos\,i_1' - \cos(i_2 + i_1' + \varphi)]}$$

Dafür kann man auch schreiben:

$$x_1 = -\{r \cdot \cos(i_2 + i_1' + \varphi)\cos[(i_2 + i_1' + \varphi) - \varphi]$$
$$+ n \cdot r \sin i_1' \cos i_1' \cdot$$
$$\sin[(i_2 + i_1'' + \varphi) - (i_1' + \varphi)]\}\{1 - n^2 \sin^2[(i_2 + i_1' + \varphi)$$
$$- (i_1' + \varphi)]\}^{3/2}:$$
$$n \cdot \cos^3[(i_2 + i_1' + \varphi) - (i_1' + \varphi)]\,[n \cos i_1' - \cos(i_2 + i_1' + \varphi)] \quad (15)$$

Nach Gleichung (9) ist:

$$\sin(i_2 + i_1' + \varphi) = n \sin i_1'$$

und:
$$\cos(i_2 + i_1' + \varphi) = \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_1'}$$

Setzt man diese Werte in (15) ein, so erhält man:

$$x = r\,\{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_1'}\,[\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_1'}\cos\varphi + n \sin i_1' \sin\varphi]$$
$$+ n \sin i_1' \cos i_1' \cdot [n \sin i_1' \cos(i_1' + \varphi)$$
$$- \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_1'} \cdot \sin(i_1' + \varphi)]\}\;\{1 - n^2[n \sin i_1' \cos(i_1' + \varphi)$$
$$- \sin(i_1' + \varphi)\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_1'}]\}^{3/2}:$$
$$n\,[\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_1'} \cdot \cos(i_1' + \varphi) + n \sin^2 i_1' \sin(i_1' + \varphi)]^3. \quad (16)$$
$$[n \cos i_1' - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_1'}]$$

Aus Gleichung (8) folgt nach einigen Umformungen

$$y = \frac{r \cdot \sin i_1'}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_1'}\cos(i_1' + \varphi) + n \sin i_1' \sin(i_1' + \varphi)} \quad (17)$$
$$- \frac{n\,[n \sin i_1' \cdot \cos(i_1' + \varphi) - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_1'} \cdot \sin(i_1' + \varphi)]}{\sqrt{1 - n^2}\,[n \sin i_1' \cos(i_1' + \varphi) - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_1'} \sin(i_1' + \varphi)]^2}\,x,$$

wo x die Bedeutung (16) hat.

Auf eine Elimination des zweiten Parameters $i_1'$ muss verzichtet werden, da hierdurch die Ausdrücke zu kompliziert werden. Die Gleichungen (16) und (17) stellen dann also die kaustische Kurve in Parameterform dar.

## § 2. Bedingungen für die Spitze der Kaustik.

Für die Spitze der Kaustik muss offenbar x ein Maximum sein, d. h. es muss sein:

$$\frac{dx}{dy} = 0,$$

oder da die Kaustik in Parameterform dargestellt ist:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{di_1'}}{\frac{dy}{di_1'}} = 0.$$

Diese Bedingung ist dann erfüllt, wenn

$$\frac{dx}{di_1'} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

ist, sodass also Gleichung (18) die Bedingung für eine Spitze der Kaustik darstellt.

In dem Ausdruck (16) setze man zur Abkürzung:

$$f_1 = \sqrt{1-n^2 \sin^2 i_1'}\,[\sqrt{1-n^2 \sin^2 i_1'} \,.\, \cos\varphi + n \,.\, \sin\varphi \sin i_1'] + n \sin i_1' \cos i_1' [n \sin i_1' \cos(i_1' + \varphi) - \sin(i_1' + \varphi)\sqrt{1-n^2 \sin^2 i_1'}] \quad (19)$$

$$f_2 = 1-n^2 [n \sin i_1' \,.\, \cos(i_1' + \varphi) - \sin(i_1' + \varphi)\sqrt{1-n^2 \sin^2 i_1'}]^2 \quad (20)$$

$$f_3 = \sqrt{1-n^2 \sin^2 i_1'} \,.\, \cos(i_1' + \varphi) + n \sin i_1' \sin(i_1' + \varphi) \quad (21)$$

$$f_4 = n \cos i_1' - \sqrt{1-n^2 \sin^2 i_1'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Dann geht Gleichung (16) über in:

$$x = \frac{r \cdot f_1 f_2^{3/2}}{n \cdot f_3^{3} f_4} \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

Aus (23) ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$\frac{dx}{di_1'} = \frac{r f_2^{1/2} f_3^{2} \{f_3 f_4 [f_1' f_2 - {}^{3/2} f_1 f_2'] - f_1 f_2 [3 f_3' f_4 + f_3 f_4']\}}{n \cdot f_3^{6} f_4^{2}} \quad (24)$$

wo $f_1' = \frac{df_1}{di_1'}$, $f_2' = \frac{df_2}{di_1'}$ u. s. w. ist.

Aus dem Vorigen ergibt sich nun, dass

$$f_2 = \cos^2 i_2'$$
$$f_3 = \cos i_2$$

ist. Es kann also keine der beiden Grössen $f_2$ und $f_3$ Null oder Unendlich werden, desgl. kann auch $f_4$ nicht Null werden, da sonst $n = 1$ sein müsste. Aus den Gleichungen (18) und (24) ergibt sich also als Bedingung für die Spitze der Kaustik:

$$f_3 f_4 [f_1' f_2 + {}^{3/2} f_1 f_2'] - f_1 f_2 [3 f_3' f_4 + f_3 f_4'] = 0, \quad (25),$$

wo die Ausdrücke $f_1$ . . . $f_4$ durch die Gleichungen (19) . . . (22) gegeben sind. Da der Winkel $i_1'$, der Brechungswinkel an der ersten Linsenfläche, mittels des Brechungsgesetzes von Snellius von $i_1$, dem Einfallswinkel an der ersten Linsenfläche, abhängt, so liefert Gleichung (25) das wichtige Resultat:

„Die Bedingung für die Spitze der Kaustik der halbkugelförmigen Konvexplanlinse ist ausser vom Brechungsexponenten der Linse und dem Neigungswinkel der einfallenden Strahlen zur optischen Achse

nur abhängig vom Einfallswinkel an der ersten Linsenfläche, dagegen unabhängig von allen andern Einfalls- und Brechungswinkeln und auch unabhängig vom Krümmungsradius r der vorderen Linsenfläche."

Es sollen jetzt die einzelnen Grössen f umgeformt werden. Da in ihnen nur noch der eine Winkel $i_1'$ vorkommt, kann man, ohne sich der Gefahr einer Verwechslung auszusetzen, den Index fortlassen, sodass also ist:

$$i = i_1' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Ferner setze man

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \sin\varphi \\ c_2 &= \cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Nach einigen Umformungen erhält man aus (19):

$$f_1 = c_2 - n^2 c_1 \sin^4 i - n^2 c_1 \sin^3 i \cos i + \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}\,[-n\, c_2 \sin^2 i \,.\, \cos i + n\, c_1 \sin^3 i] \quad (28)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich, wenn man setzt:

$$\alpha_1 = 3n^3 c_2 + 3n c_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

$$f_1' = \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}\,[-4n^2 c_2 \sin^3 i \cos i - 3n^2 c_1 \sin^2 i + 4n^2 c_1 \sin^4 i] + \alpha_1 \sin^3 i - 4n^3 c_2 \sin^5 i - 4n^3 c_1 \sin^4 i \cos i - 2n c_2 \sin i + 3n c_1 \sin^2 i \cos i]: \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$
$$\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}$$

Führt man die Grössen ein:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= 1 - n^2 c_1^2 & \alpha_3 &= 2n^4 c_2^2 - 2n^4 c_1^2 \\ \alpha_4 &= -n^4 c_2^2 - n^2 c_2^2 + n^2 c_1^2 + n^4 c_1^2 & \alpha_5 &= -2n^3 c_1^2 + 2n^3 c_2^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (31)$$

so erhält man aus (20) nach einigen Transformationen:

$$f_2 = \alpha_2 + \alpha_3 \,.\, \sin^4 i + \alpha_4 \sin^2 i - 2n^2 c_1 c_2 \sin i \,.\, \cos i$$
$$+ 4n^4 c_1 c_2 \sin^3 i \cos i + \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}\,[- 4n^3 c_1 c_2 \sin^3 i$$
$$+ \alpha_5 \sin^2 i \cos i + 2n^3 c_1 c_2 \sin i] \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Hieraus ergibt sich, wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_6 &= 2n^2 c_1 c_2 + 6n^4 c_1 c_2 \\ \alpha_7 &= 3n^5 c_1^2 - 3n^5 c_2^2 + 3n^3 c_1^2 - 3n^3 c_2^2 \\ \alpha_8 &= -\,2n^5 c_1 c_2 - 6n^3 c_1 c_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (33)$$

$$f_2' = 2\,\{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}\,[2\alpha_3 \sin^3 i \cos i + \alpha_4 \sin i \,.\, \cos i - n^2 c_1 c_2$$
$$+ \alpha_6 \sin^2 i - 8n^4 c_1 c_2 \sin^4 i] + 8n^5 c_1 c_2 \sin^4 i \cos i + \alpha_7 \sin^3 i$$
$$+ 2n^2 \alpha_5 \sin^5 i + \alpha_8 \sin^2 i \cos i + \alpha_5 \sin i + n^3 c_1 c_2 \cos i\}:$$
$$\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Aus (21) folgt:

$$f_3 = n c_2 \sin^2 i + n c_1 \sin i \,.\, \cos i +$$
$$\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}\,[c_2 \cos i - c_1 \sin i] \quad (35)$$

Setzt man:

$$\alpha_9 = -\,n^2 c_2 - c_2\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

so folgt aus (35):

$$f_3' = \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}\,[2n c_2 \sin i \cos i + n c_1 - 2n c_1 \sin^2 i]$$
$$+ \alpha_9 \sin i + 2n^2 c_2 \sin^3 i + 2n^2 c_1 \sin^2 i \cos i - c_1 \cos i:$$
$$\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Aus (22) folgt:

$$f_4' = n^2 \sin i \,.\, \cos i - n \sin i \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i} : \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i} \quad (38)$$

Aus (22) und (35) folgt nach einigen Umformungen, wenn man setzt:

$$\alpha_{10} = n^2 c_1 + c_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

$$f_3 \, . \, f_4 = 2n^2 c_2 \sin^2 i \, . \cos i + \alpha_{10} \sin i - 2n^2 c_1 \sin^3 i$$

$$+ \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i} \, [n c_2 - 2n c_2 \sin^2 i - 2n c_1 \sin i \cos i] \quad . \quad (40)$$

Man führe zur Abkürzung folgende Grössen ein:

$$\left.\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 \alpha_2 - 5n c_2 \alpha_4 - 9n^3 c_1^2 c_2 - 9n^5 c_1^2 c_2 + 3c_2 \alpha_7 \\
\beta_2 &= -4n^3 c_2 \alpha_2 - 8n c_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_4 + 46n^5 c_1^2 c_2 \\
&\quad + 6n^3 c_1^2 c_2 - n^2 c_2 \alpha_5 + 6n^7 c_1^2 c_2 - 3n^2 c_1 \alpha_8 \\
&\quad + 3n c_2 \alpha_4 + 3n c_1 \alpha_6 + 3n^3 c_2 \alpha_4 \\
\beta_3 &= -4n^3 c_1 \alpha_2 + 6n c_1 \alpha_4 - 2n^2 c_1 c_2 \alpha_1 \\
&\quad + 2n^5 c_1 c_2^2 - 6n^2 c_1 \alpha_5 - 3n c_2 \alpha_6 \\
\beta_4 &= -2n c_2 \alpha_2 + 3 c_2 \alpha_5 \\
\beta_5 &= 3n c_1 \alpha_2 + 7n^3 c_1 c_2^2 + 3 c_2 \alpha_8 \\
\beta_6 &= \alpha_1 \alpha_3 - 7n^3 c_2 \alpha_4 - 60n^5 c_1^2 c_2 - 60n^7 c_1^2 c_2 \\
&\quad + 4n^2 c_2 \alpha_5 + 4n^4 c_2 \alpha_5 - 3n^2 c_2 \alpha_7 + 3n^2 c_1 \alpha_8 + 6n c_2 \alpha_3 \\
&\quad + 6n^3 c_2 \alpha_3 - 3n^3 c_1 \alpha_6 \\
\beta_7 &= -10n^3 c_2 \alpha_3 + 80n^7 c_1^2 c_2 - 10n^4 c_2 \alpha_5 \\
\beta_8 &= -10n^3 c_1 \alpha_3 - 80n^7 c_1 c_2^2 - 10n^4 c_1 \alpha_5 \\
\beta_9 &= 9n c_1 \alpha_3 - 7n^3 c_1 \alpha_4 + 48n^5 c_1 c_2^2 + 4n^4 c_1 c_2 \alpha_1 \\
&\quad + 4n^2 c_1 \alpha_5 + 3n^4 c_1 \alpha_5 + 8n^7 c_1 c_2^2 - 3n^2 c_2 \alpha_8 \\
&\quad - 3n^2 c_1 \alpha_8 + 3n^3 c_2 \alpha_6 \\
\beta_{10} &= 3n^3 c_1 c_2^2 \\
\beta_{11} &= -4n^2 c_2 \alpha_2 + 18n^4 c_1^2 c_2 - 5n c_2 \alpha_5 + 6 c_2 \alpha_3 \\
\beta_{12} &= -3n^2 c_1 \alpha_2 - 7n^4 c_1 c_2^2 + 3 c_2 \alpha_6 \\
\beta_{13} &= 4n^2 c_1 \alpha_2 - 6n^2 c_1 \alpha_4 - 2n^4 c_1 c_2^2 + 6n c_1 \alpha_5 \\
&\quad + 2n^3 c_1 c_2 \alpha_1 - 3n c_2 \alpha_8 \\
\beta_{14} &= -10n^2 c_2 \alpha_3 + 80n^6 c_1^2 c_2 - 10n^3 c_2 \alpha_5 \\
\beta_{15} &= -9n^2 c_1 \alpha_3 + 7n^2 c_1 \alpha_4 - 8n^4 c_1 c_2^2 - 48n^6 c_1 c_2^2 \\
&\quad - 4n^3 c_1 c_2 \alpha_1 - 4n^3 c_1 \alpha_5 - 3n c_1 \alpha_5 + 3n c_2 \alpha_8 \\
&\quad + 3n c_1 \alpha_7 - 3n^2 c_2 a_6
\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

$$\left.\begin{aligned}
\beta_{16} &= 10n^2 c_1 \alpha_3 + 80n^6 c_1 c_2^2 + 10n^3 c_1 \alpha_5 \\
\beta_{17} &= -7n^2 c_2 \alpha_4 - 20n^4 c_1^2 c_2 - 20n^6 c_1^2 c_2 \\
&\quad + \alpha_1 \alpha_5 - 3n c_2 \alpha_7 + 3n c_1 \alpha_8 - 3n^2 c_1 \alpha_6 \\
\beta_{18} &= 2c_2 \alpha_4 \\
\beta_{19} &= -3n^2 c_1 c_2^2
\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Aus den Gleichungen (28), (30), (32), (34) ergibt sich dann nach längeren Umformungen:

$$\left.\begin{aligned}
f_1' f_2 + {}^3/_2 f_1 f_2' &= [\beta_1 \sin^3 i + \beta_2 \sin^5 i + \beta_3 \sin^4 i \cos i \\
&\quad + \beta_4 \sin i + \beta_5 \sin^2 i \cos i + \beta_6 \sin^7 i + \beta_7 \sin^9 i \\
&+ \beta_8 \sin^8 i \cos i + \beta_9 \sin^6 i \cos i + \beta_{10} \cos i] \\
&+ \sqrt{1-n^2 \sin^2 i}\,[\beta_{11} \sin^3 i \cos i + \beta_{12} \sin^2 i + \beta_{13} \sin^4 i \\
&+ \beta_{14} \sin^7 i \cos i + \beta_{15} \sin^6 i + \beta_{16} \sin^8 i + \beta_{17} \sin^5 i \cos i \\
&\quad + \beta_{18} \sin i \cos i + \beta_{19}] : \sqrt{1-n^2 \sin^2 i}
\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Man führe ferner folgende Grössen ein:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_1 &= c_2 \alpha_2 \\
\gamma_2 &= c_2 \alpha_3 - n^2 c_2 \alpha_2 + 4n^4 c_1^2 c_2 - n c_2 \alpha_5 \\
\gamma_3 &= c_2 \alpha_4 \\
\gamma_4 &= -2n^2 c_1 c_2^2 \\
\gamma_5 &= 2n^4 c_1 c_2^2 - n^2 c_1 \alpha_2 \\
\gamma_6 &= -n^2 c_2 \alpha_3 + 8n^6 c_1^2 c_2 - n^3 c_2 \alpha_5 \\
\gamma_7 &= -n^2 c_2 \alpha_4 - 6n^4 c_1^2 c_2 - 6n^6 c_1^2 c_2 \\
&\quad + n c_2 \alpha_5 + n^3 c_2 \alpha_5 \\
\gamma_8 &= 6n^4 c_1 c_2^2 - n^2 c_1 \alpha_4 + n c_1 \alpha_5 + 2n^6 c_1 c_2^2 \\
\gamma_9 &= -8n^6 c_1 c_2^2 - n^2 c_1 \alpha_3 - n^3 c_1 \alpha_5 \\
\gamma_{10} &= -2n^3 c_1 c_2^2 + n c_1 a_2 \\
\gamma_{11} &= c_2 \alpha_5 - n c_2 \alpha_2 \\
\gamma_{12} &= 2n^3 c_1 c_2^2 \\
\gamma_{13} &= 8n^5 c_1 c_2^2 + n^2 c_1 \alpha_5 + n c_1 \alpha_3 \\
\gamma_{14} &= -n^2 c_2 \alpha_5 + 8n^5 c_1^2 c_2 - n c_2 \alpha_3 \\
\gamma_{15} &= -6n^5 c_1 c_2^2 - n^2 c_1 \alpha_5 - 2n^3 c_1 c_2^2 + n c_1 a_4 \\
\gamma_{16} &= -2n^5 c_1^2 c_2 - n c_2 \alpha_4 - 2n^3 c_1^2 c_2
\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Dann folgt aus (19) und (20):

$$f_1 f_2 = [\gamma_1 + \gamma_2 \sin^4 i + \gamma_3 \sin^2 i + \gamma_4 \sin i \,.\, \cos i + \gamma_5 \sin^3 i \cos i + \gamma_6 \sin^8 i + \gamma_7 \sin^6 i + \gamma_8 \sin^5 i \cos i + \gamma_9 \sin^7 i \cos i] + \sqrt{1-n^2 \sin^2 i}\,[\gamma_{10} \sin^3 i + \gamma_{11} \sin^2 i \cos i + \gamma_{12} \sin i + \gamma_{13} \sin^7 i + \gamma_{14} \sin^6 i \cos i + \gamma_{15} \sin^5 i + \gamma_{16} \sin^4 i \,.\, \cos i] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

Man setze:

$$\left.\begin{array}{ll} \delta_1 = 3n\,\alpha_9 - 7n\,c_2 & \delta_6 = 7n^2 c_2 - 3\alpha_9 \\ \delta_2 = 14n^3 c_2 & \delta_7 = 14n^2 c_2 \\ \delta_3 = 10n^3 c_1 + 10n\,c_1 & \delta_8 = -14n^2 c_1 \\ \delta_4 = -14\,n^3 c_1 & \delta_9 = 3n^2 c_1 + 3c_1 \\ \delta_5 = -6n\,c_2 & \end{array}\right\} \quad (45)$$

Man erhält aus (21), (22), (37), (38):

$$3 f_3' f_4 + f_3 f_4' = \{[\delta_1 \sin i \cos i + \delta_2 \sin^3 i \cos i + \delta_3 \sin^2 i + \delta_4 \sin^4 i + \delta_5] + \sqrt{1-n^2 \sin^2 i}\,[\delta_6 \sin i + \delta_7 \sin^3 i + \delta_8 \sin^2 i \cos i + \delta_9 \cos i]\} : \sqrt{1-n^2 \sin^2 i} \quad (46)$$

Man setze:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 = 2n^2 c_2 \beta_1 + \alpha_{10}\beta_3 - 2n^2 c_1 \beta_5 + nc_2 \beta_{17} - 2nc_2 \beta_{11} \\ \quad - 2nc_1 \beta_{13} - n^3 c_2 \beta_{11} + 2n^3 c_2 \beta_{18} + 2n^3 c_1 \beta_{12} - \delta_1 \gamma_2 \\ \quad - \delta_2 \gamma_3 - \delta_3 \gamma_5 - \delta_4 \gamma_4 - \delta_5 \gamma_8 - \delta_6 \gamma_{16} - \delta_7 \gamma_{11} - \delta_8 \gamma_{10} \\ \quad - \delta_9 \gamma_{15} + n^2 \delta_6 \gamma_{11} + n^2 \delta_8 \gamma_{12} + n^2 \delta_9 \gamma_{10} \\ \varepsilon_2 = 2n^2 c_2 \beta_2 + \alpha_{10}\beta_9 - 2n^2 c_1 \beta_3 + nc_2 \beta_{14} - 2nc_2 \beta_{17} \\ \quad - 2nc_1 \beta_{15} - n^3 c_2 \beta_{17} + 2n^3 c_2 \beta_{11} + 2n^3 c_1 \beta_{13} - \delta_1 \gamma_7 \\ \quad - \delta_2 \gamma_2 - \delta_3 \gamma_8 - \delta_4 \gamma_5 - \delta_5 \gamma_4 - \delta_6 \gamma_{14} - \delta_7 \gamma_{16} + \delta_8 \gamma_{15} \\ \quad - \delta_9 \gamma_{13} + n^2 \delta_6 \gamma_{16} + n^2 \delta_7 \gamma_{11} + n^2 \delta_8 \gamma_{11} + n^2 \delta_9 \gamma_{15} \\ \varepsilon_3 = 2n^2 c_2 \beta_3 - 2n^2 c_2 \beta_5 + \alpha_{10}\beta_2 - 2n^2 c_1 \beta_1 + nc_2 \beta_{15} \end{array}\right\} \quad (47)$$

$$
\begin{aligned}
&- 2nc_2\beta_{13} + 2nc_1\beta_{11} - 2nc_1\beta_{17} - n^3c_2\beta_{13} + 2n^3c_2\beta_{12}\\
&+ 2n^3c_1\beta_{11} - 2n^3c_1\beta_{18} + \delta_1\gamma_{25} - \delta_1\gamma_8 + \delta_2\gamma_4 - \delta_2\gamma_5\\
&- \delta_3\gamma_2 - \delta_4\gamma_3 - \delta_5\gamma_7 - \delta_6\gamma_{15} - \delta_7\gamma_{10} - \delta_8\gamma_{11} - \delta_8\gamma_{16}\\
&- \delta_9\gamma_{14} + \delta_9\gamma_{16} + n^2\delta_6\gamma_{10} + n^2\delta_7\gamma_{12} + n^2\delta_8\gamma_{11}\\
&- n^2\delta_9\gamma_{11} - n^2\delta_9\gamma_{16}\\
\varepsilon_4 = &- 2n^2c_2\beta_3 + 2n^2c_2\beta_9 + \alpha_{10}\beta_6 - 2n^2c_1\beta_2 + nc_2\beta_{16}\\
&- 2nc_2\beta_{15} - 2nc_1\beta_{14} + 2nc_1\beta_{17} - n^3c_2\beta_{15} + 2n^3c_2\beta_{13}\\
&- 2n^3c_1\beta_{11} + 2n^3c_1\beta_{17} + \delta_1\gamma_8 - \delta_1\gamma_9 + \delta_2\gamma_5 - \delta_2\gamma_8\\
&- \delta_3\gamma_7 - \delta_4\gamma_2 - \delta_5\gamma_6 - \delta_6\gamma_{13} - \delta_7\gamma_{15} - \delta_8\gamma_{14} + \delta_8\gamma_{16}\\
&+ d_9\gamma_{14} + n^2\delta_6\gamma_{15} + n^2\delta_7\gamma_{10} - n^2\delta_8\delta_{11} + n^2\delta_8\gamma_{16}\\
&+ n^2\delta_9\gamma_{14} - n^2\delta_9\gamma_{16}\\
\varepsilon = &\ 2n^2c_2\beta_4 + \alpha_{10}\beta_5 - 2n^2c_1\beta_{10} + nc_2\beta_{11} - 2nc_2\beta_{18}\\
&-2nc_1\beta_{12} - n^3c_2\beta_{18} + 2n^3c_1\beta_{19} - \delta_1\gamma_3 - \delta_2\gamma_1 - \delta_3\gamma_4\\
&- \delta_5\gamma_5 - \delta_6\gamma_{11} - \delta_8\gamma_{12} - \delta_9\gamma_{10} + n^2\delta_9\gamma_{12}\\
\varepsilon_6 = &\ 2n^2c_2\beta_5 - 2n^2c_2\beta_{10} + \alpha_{10}\beta_1 - 2n^2c_1\beta_4 + nc_2\beta_{13}\\
&- 2nc_2\beta_{12} - 2nc_1\beta_{11} + 2nc_1\beta_{18} - n^3c_2\beta_{12} + 2n^3c_2\beta_{19}\\
&+ 2n^3c_1\beta_{18} + \delta_1\gamma_4 - \delta_1\gamma_5 - \delta_2\gamma_4 - \delta_3\gamma_3 - \delta_4\gamma_1 - \delta_5\gamma_2\\
&- \delta_6\gamma_{10} - \delta_7\gamma_{12} - \delta_8\gamma_{11} - \delta_9\gamma_{11} - \delta_9\gamma_{16} + n^2\delta_6\gamma_{12}\\
&+ n^2\delta_9\gamma_{11}\\
\varepsilon_7 = &\ 2n^2c_2\beta_6 + \alpha_{10}\beta_8 - 2n^2c_1\beta_9 - 2nc_2\beta_{14} - 2nc_1\beta_{16}\\
&- n^3c_2\beta_{14} + 2n^3c_2\beta_{17} + 2n^3c_1\beta_{15} - \delta_1\gamma_6 - \delta_2\gamma_7 - \delta_3\gamma_9\\
&- \delta_4\gamma_8 - \delta_7\gamma_{14} - \delta_8\gamma_{13} + n^2\delta_6\gamma_{14} + n^2\delta_7\gamma_{16} + n^2\delta_8\gamma_{15}\\
&+ n^2\delta_9\gamma_{13}\\
\varepsilon_8 = &\ 2n^2c_2\beta_7 - 2n^2c_1\beta_8 + 2n^3c_2\beta_{14} + 2n^3c_1\beta_{16} - \delta_2\gamma_6\\
&- \delta_4\gamma_9 + n^2\delta_7\gamma_{14} + n^2\delta_8\gamma_{13}\\
\varepsilon_9 = &\ 2n^2c_2\beta_8 - 2n^2c_2\beta_9 + \alpha_{10}\beta_7 - 2n^2c_1\beta_6 - 2n^2c_2\beta_{16}\\
&+ 2nc_1\beta_{14} + n^3c_2\beta_{16} + 2n^3c_2\beta_{15} + 2n^3c_1\beta_{14} - 2n^3c_1\beta_{17}\\
&+ \delta_1\gamma_9 + \delta_2\gamma_8 + \delta_2\gamma_9 + \delta_3\gamma_6 - \delta_4\gamma_7 - \delta_7\gamma_{13} + \delta_8\gamma_{14}\\
&+ n^2\delta_6\gamma_{13} + n^2\delta_7\gamma_{15} + n^2\delta_8\gamma_{14} - n^2\delta_8\gamma_{16} + n^2\delta_9\gamma_{14}\\
\varepsilon_{10} = &- 2n^2c_2\beta_8 - 2n^2c_1\beta_7 + 2n^3c_2\beta_{16}\\
&- 2n^3c_1\beta_{14} + \delta_2\gamma_9 - \delta_4\gamma_6 + n^2\delta_7\gamma_{13} - n^2\delta_8\gamma_{14}\\
\varepsilon_{11} = &\ 2n^2c_2\beta_{10} + \alpha_{10}\beta_4 + nc_2\beta_{12} - 2nc_2\beta_{19} - 2nc_1\beta_{18}\\
&n^3c_2\beta_{19} - \delta_1\gamma_4 - \delta_3\gamma_1 - \delta_5\gamma_3 - \delta_6\gamma_{12} - \delta_9\gamma_{11}\\
\varepsilon_{12} = &\ \alpha_{10}\beta_{10} + nc_2\beta_{18} - 2nc_1\beta_{19} - \delta_1\gamma_1 - \delta_5\gamma_4 - \delta_9\gamma_{12}\\
\varepsilon_{13} = &\ nc_2\beta_{19} - \delta_5\gamma_1
\end{aligned}
\qquad (47)
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{14} &= 2n^2c_2\beta_{11} - 2n^2c_2\beta_{18} + \alpha_{10}\beta_{13} - 2n^2c_1\beta_{12} + nc_2\beta_2 \\
&\quad - 2nc_2\beta_1 - 2nc_1\beta_3 + 2nc_1\beta_5 - \delta_6\gamma_2 - \delta_7\gamma_3 + \delta_8\gamma_4 \\
&\quad - \delta_8\gamma_5 + \delta_9\gamma_5 - \delta_9\gamma_8 + \delta_1\gamma_{11} - \delta_1\gamma_{16} - \delta_2\gamma_{11} - \delta_3\gamma_{10} \\
&\quad - \delta_4\gamma_{12} - \delta_5\gamma_{15} \\
\varepsilon_{15} &= -2n^2c_2\beta_{11} + 2n^2c_2\beta_{17} + \alpha_{10}\beta_{15} - 2n^2c_1\beta_{13} + nc_2\beta_6 \\
&\quad - 2nc_2\beta_2 + 2nc_1\beta_3 - 2nc_1\beta_9 - \delta_6\gamma_7 - \delta_7\gamma_2 + \delta_8\gamma_5 \\
&\quad - \delta_8\gamma_8 + \delta_9\gamma_8 - \delta_9\gamma_9 - \delta_1\gamma_{14} + \delta_1\gamma_{16} + \delta_2\gamma_{11} - \delta_2\gamma_{16} \\
&\quad - \delta_3\gamma_1 - \delta_4\gamma_{10} - \delta_5\gamma_{13} \\
\varepsilon_{16} &= 2n^2c_2\beta_{12} + \alpha_{10}\beta_{11} - 2n^2c_1\beta_{18} + nc_2\beta_3 - 2nc_2\beta_5 \\
&\quad - 2nc_1\beta_1 - \delta_6\gamma_5 - \delta_7\gamma_4 - \delta_8\gamma_3 - \delta_9\gamma_2 - \delta_1\gamma_{10} - \delta_2\gamma_{12} \\
&\quad - \delta_3\gamma_{11} - \delta_5\gamma_{16} \\
\varepsilon_{17} &= 2n^2c_2\beta_{13} + \alpha_{10}\beta_{17} - 2n^2c_1\beta_{11} + nc_2\beta_9 - 2nc_2\beta_3 \\
&\quad - 2nc_1\beta_2 - \delta_6\gamma_8 - \delta_7\gamma_5 - \delta_8\gamma_2 - \delta_8\gamma_7 - \delta_1\gamma_{15} - \delta_2\gamma_{10} \\
&\quad - \delta_3\gamma_{16} - \delta_4\gamma_{11} - \delta_5\gamma_{14} \\
\varepsilon_{18} &= 2n^2c_2\beta_{14} - 2n^2c_2\beta_{17} + \alpha_{10}\beta_{16} - 2n^2c_1\beta_{15} + nc_2\beta_7 \\
&\quad - 2nc_2\beta_6 - 2nc_1\beta_8 - 2nc_1\beta_9 - \delta_6\gamma_6 - \delta_7\gamma_7 + \delta_8\gamma_8 \\
&\quad - \delta_8\gamma_9 + \delta_9\gamma_9 + \delta_1\gamma_{14} - \delta_2\gamma_{14} + \delta_2\gamma_{16} - \delta_3\gamma_{13} - \delta_4\gamma_{15} \\
\varepsilon_{19} &= -2n^2c_2\beta_{14} - 2n^2c_1\beta_{16} - 2nc_2\beta_7 + 2nc_1\gamma_8 - \delta_7\gamma_6 \\
&\quad + \delta_8\gamma_9 + \delta_2\gamma_{14} - \delta_4\gamma_{13} \\
\varepsilon_{20} &= 2n^2c_2\beta_{15} + \alpha_{10}\beta_{15} - 2n^2c_1\beta_{17} + nc_2\beta_8 - 2nc_2\beta_9 \\
&\quad - 2nc_1\beta_6 - \delta_6\gamma_9 - \delta_7\gamma_8 - \delta_8\gamma_7 - \delta_9\gamma_6 - \delta_1\gamma_{13} - \delta_2\gamma_{15} \\
&\quad - \delta_3\gamma_{14} - \delta_4\gamma_{16} \\
\varepsilon_{21} &= 2n^2c_2\beta_{16} - 2n^2c_1\beta_{14} - 2nc_2\beta_8 - 2nc_1\beta_7 - \delta_7\gamma_9 \\
&\quad - \delta_8\gamma_6 - \delta_2\gamma_{13} - \delta_4\gamma_{14} \\
\varepsilon_{22} &= 2n^2c_2\beta_{18} + \alpha_{10}\beta_{12} - 2n^2c_1\beta_{19} + nc_2\beta_1 - 2nc_2\beta_4 \\
&\quad - 2nc_1\beta_5 + 2nc_1\beta_{10} - \delta_6\gamma_3 - \delta_7\gamma_1 - \delta_8\gamma_4 + \delta_9\gamma_4 \\
&\quad - \delta_9\gamma_5 - \delta_1\gamma_{11} - \delta_3\gamma_{12} - \delta_5\gamma_{10} \\
\varepsilon_{23} &= 2n^2c_2\beta_{19} + \alpha_{10}\beta_{18} + nc_2\beta_5 - 2nc_2\beta_{10} - 2nc_1\beta_4 \\
&\quad - \delta_6\gamma_4 - \delta_8\gamma_1 - \delta_9\gamma_3 - \delta_1\gamma_{12} - \delta_5\gamma_{11} \\
\varepsilon_{24} &= \alpha_{10}\beta_{19} + nc_2\beta_4 - 2nc_1\beta_{10} - \delta_6\gamma_1 - \delta_9\gamma_4 - \delta_5\gamma_{12} \\
\varepsilon_{25} &= nc_2\beta_{10} - \delta_9\gamma_1
\end{aligned}
\qquad (47)
$$

Setzt man in (25) die Werte von (40), (42), (44), (46) ein, so erhält man nach Unterdrückung des Faktors

$$\frac{1}{\sqrt{1-n^2 \sin^2 i}}$$

wenn man (47) berücksichtigt als Bedingung für die Spitze der Kaustik:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1 \sin^5 i \,.\, \cos i + \varepsilon_2 \sin^7 i \cos i + \varepsilon_3 \sin^6 i + \varepsilon_4 \sin^8 i \\
&\quad + \varepsilon_5 \sin^3 i \cos i + \varepsilon_6 \sin^4 i + \varepsilon_7 \sin^9 i \cos i + \varepsilon_8 \sin^{11} i \cos i \\
&+ \varepsilon_9 \sin^{10} i + \varepsilon_{10} \sin^{12} i + \varepsilon_{11} \sin^2 i + \varepsilon_{12} \sin i \cos i + \varepsilon_{13} \\
&\quad + \sqrt{1-n^2 \sin^2 i}\,[\varepsilon_{14} \sin^5 i + \varepsilon_{15} \sin^7 i + \varepsilon_{16} \sin^4 i \cos i \\
&+ \varepsilon_{17} \sin^6 i \cos i + \varepsilon_{18} \sin^9 i + \varepsilon_{19} \sin^{11} i + \varepsilon_{20} \sin^8 i \cos i \\
&\quad + \varepsilon_{21} \sin^{10} i \cos i + \varepsilon_{22} \sin^3 i + \varepsilon_{23} \sin^2 i \cos i \\
&\quad + \varepsilon_{24} \sin i + \varepsilon_{25} \cos i] = 0 \qquad (48)
\end{aligned}$$

Man führe foldende Grössen ein:

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_1 &= \varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_5 + 2\varepsilon_2 \varepsilon_5 - 2\varepsilon_2 \varepsilon_{12} + 2\varepsilon_3 \varepsilon_6 + 2\varepsilon_4 \varepsilon_{11} \\
&\quad + 2\varepsilon_7 \varepsilon_{12} + 2\varepsilon_9 \varepsilon_{13} - \varepsilon_{14}^2 + \varepsilon_{16}^2 - 2\varepsilon_{15} \varepsilon_{22} - 2\varepsilon_{16} \varepsilon_{17} \\
&\quad + 2\varepsilon_{17} \varepsilon_{23} - 2\varepsilon_{18} \varepsilon_{24} - 2\varepsilon_{20} \varepsilon_{23} + 2\varepsilon_{20} \varepsilon_{25} - 2\varepsilon_{21} \varepsilon_{25} \\
&\quad + 2n^2 \varepsilon_{14} \varepsilon_{22} + 2n^2 \varepsilon_{15} \varepsilon_{24} - 2n^2 \varepsilon_{16} \varepsilon_{23} + 2n^2 \varepsilon_{17} \varepsilon_{23} \\
&\quad - 2n^2 \varepsilon_{17} \varepsilon_{25} + 2n^2 \varepsilon_{20} \varepsilon_{25} + n^2 \varepsilon_{16}^2 \\
\zeta_2 &= -\varepsilon_1^2 + \varepsilon_3^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 - 2\varepsilon_2 \varepsilon_5 + 2\varepsilon_4 \varepsilon_6 + 2\varepsilon_5 \varepsilon_7 \\
&\quad - 2\varepsilon_7 \varepsilon_{12} + 2\varepsilon_8 \varepsilon_{12} + 2\varepsilon_9 \varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{10} \varepsilon_{13} - \varepsilon_{17}^2 \\
&\quad - 2\varepsilon_{14} \varepsilon_{15} + 2\varepsilon_{16} \varepsilon_{17} - 2\varepsilon_{16} \varepsilon_{20} - 2\varepsilon_{18} \varepsilon_{22} - 2\varepsilon_{19} \varepsilon_{24} \\
&\quad + 2\varepsilon_{20} \varepsilon_{23} - 2\varepsilon_{21} \varepsilon_{23} + 2\varepsilon_{21} \varepsilon_{25} + 2n^2 \varepsilon_{15} \varepsilon_{22} \\
&\quad + 2n^2 \varepsilon_{16} \varepsilon_{17} - 2n^2 \varepsilon_{17} \varepsilon_{23} + 2n^2 \varepsilon_{18} \varepsilon_{24} + 2n^2 \varepsilon_{20} \varepsilon_{23} \\
&\quad - 2n^2 \varepsilon_{20} \varepsilon_{25} + 2n^2 \varepsilon_{21} \varepsilon_{25} + n^2 \varepsilon_{14}^2 - n^2 \varepsilon_{16}^2 \\
\zeta_3 &= \varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_7 + 2\varepsilon_3 \varepsilon_4 - 2\varepsilon_5 \varepsilon_7 + 2\varepsilon_5 \varepsilon_8 \\
&\quad + 2\varepsilon_6 \varepsilon_9 - \varepsilon_{15}^2 - 2\varepsilon_8 \varepsilon_{12} + 2\varepsilon_{10} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{17}^2 - 2\varepsilon_{14} \varepsilon_{18} \\
&\quad + 2\varepsilon_{16} \varepsilon_{20} - 2\varepsilon_{16} \varepsilon_{21} - 2\varepsilon_{17} \varepsilon_{20} - 2\varepsilon_{19} \varepsilon_{22} + 2\varepsilon_{21} \varepsilon_{23} \\
&\quad + 2n^2 \varepsilon_{14} \varepsilon_{15} - 2n^2 \varepsilon_{16} \varepsilon_{17} + 2n^2 \varepsilon_{16} \varepsilon_{20} + 2n^2 \varepsilon_{18} \varepsilon_{22} \\
&\quad + 2n^2 \varepsilon_{19} \varepsilon_{24} - 2n^2 \varepsilon_{20} \varepsilon_{23} + 2n^2 \varepsilon_{21} \varepsilon_{23} - 2n^2 \varepsilon_{21} \varepsilon_{25} \\
&\quad + n^2 \varepsilon_{17}^2 \\
\zeta_4 &= -\varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_7 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_8 + 2\varepsilon_2 \varepsilon_7 + 2\varepsilon_3 \varepsilon_9 \\
&\quad - 2\varepsilon_5 \varepsilon_8 + 2\varepsilon_6 \varepsilon_{10} - \varepsilon_{20}^2 - 2\varepsilon_{14} \varepsilon_{19} - 2\varepsilon_{15} \varepsilon_{18}
\end{aligned}\right\} \quad (49)$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2\varepsilon_{16}\,\varepsilon_{21} + 2\varepsilon_{17}\,\varepsilon_{20} - 2\varepsilon_{17}\,\varepsilon_{21} + 2n^2\,\varepsilon_{14}\,\varepsilon_{18}\\
&+ 2n^2\,\varepsilon_{16}\,\varepsilon_{20} + 2n^2\,\varepsilon_{16}\,\varepsilon_{21} + 2n^2\,\varepsilon_{17}\,\varepsilon_{20} + 2n^2\,\varepsilon_{19}\,\varepsilon_{22}\\
&- 2n^2\,\varepsilon_{21}\,\varepsilon_{23} + n^2\,\varepsilon_{15}{}^2 - n^2\,\varepsilon_{17}{}^2\\
\zeta_5 = {}&\varepsilon_5{}^2 + 2\varepsilon_1\,\varepsilon_{12} + 2\varepsilon_3\,\varepsilon_{13} - 2\varepsilon_5\,\varepsilon_{12} + 2\varepsilon_6\,\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}{}^2\\
&+ \varepsilon_{23}{}^2 - 2\varepsilon_{14}\,\varepsilon_{24} - 2\varepsilon_{16}\,\varepsilon_{23} + 2\varepsilon_{16}\,\varepsilon_{25} - 2\varepsilon_{17}\,\varepsilon_{25}\\
&+ 2n^2\,\varepsilon_{16}\,\varepsilon_{25} + 2n^2\,\varepsilon_{22}\,\varepsilon_{24} - 2n^2\,\varepsilon_{23}\,\varepsilon_{25} + n^2\,\varepsilon_{23}{}^2\\
\zeta_6 = {}&-\varepsilon_5{}^2 + \varepsilon_6{}^2 + 2\varepsilon_1\,\varepsilon_5 - 2\varepsilon_1\,\varepsilon_{12} + 2\varepsilon_2\,\varepsilon_{12} + 2\varepsilon_3\,\varepsilon_{11}\\
&+ 2\varepsilon_4\,\varepsilon_{13} - \varepsilon_{16}{}^2 - 2\varepsilon_{14}\,\varepsilon_{22} - 2\varepsilon_{15}\,\varepsilon_{24} + 2\varepsilon_{16}\,\varepsilon_{23}\\
&- 2\varepsilon_{17}\,\varepsilon_{23} + 2\varepsilon_{17}\,\varepsilon_{25} - 2\varepsilon_{20}\,\varepsilon_{25} + 2n^2\,\varepsilon_{14}\,\varepsilon_{24}\\
&+ 2n^2\,\varepsilon_{16}\,\varepsilon_{23} - 2n^2\,\varepsilon_{16}\,\varepsilon_{25} + 2n^2\,\varepsilon_{17}\,\varepsilon_{25} + n^2\,\varepsilon_{22}{}^2\\
&- n^2\,\varepsilon_{23}{}^2\\
\zeta_7 = {}&\varepsilon_7{}^2 - 2\varepsilon_1\,\varepsilon_8 - 2\varepsilon_2\,\varepsilon_7 + 2\varepsilon_2\,\varepsilon_8 + 2\varepsilon_3\,\varepsilon_{10} - \varepsilon_{18}{}^2\\
&- 2\varepsilon_{15}\,\varepsilon_{19} + 2\varepsilon_{17}\,\varepsilon_{21} + 2\varepsilon_4\,\varepsilon_9 - 2\varepsilon_{20}\,\varepsilon_{21} + 2n^2\,\varepsilon_{14}\,\varepsilon_{19}\\
&+ 2n^2\,\varepsilon_{15}\,\varepsilon_{18} - 2n^2\,\varepsilon_{16}\,\varepsilon_{21} - 2n^2\,\varepsilon_{17}\,\varepsilon_{20} + 2n^2\,\varepsilon_{17}\,\varepsilon_{21}\\
&+ \varepsilon_{20}{}^2 + n^2\,\varepsilon_{20}{}^2\\
\zeta_8 = {}&-\varepsilon_7{}^2 + \varepsilon_9{}^2 - 2\varepsilon_2\,\varepsilon_8 + 2\varepsilon_4\,\varepsilon_{10} + 2\varepsilon_7\,\varepsilon_8 - \varepsilon_{21}{}^2\\
&- 2\varepsilon_{18}\,\varepsilon_{19} + 2\varepsilon_{20}\,\varepsilon_{21} + 2n^2\,\varepsilon_{15}\,\varepsilon_{19} - 2n^2\,\varepsilon_{17}\,\varepsilon_{21}\\
&+ 2n^2\,\varepsilon_{20}\,\varepsilon_{21} + n^2\,\varepsilon_{18}{}^2 + n^2\,\varepsilon_{20}{}^2\\
\zeta_9 = {}&\varepsilon_8{}^2 - 2\varepsilon_7\,\varepsilon_8 + 2\varepsilon_9\,\varepsilon_{10} - \varepsilon_{19}{}^2 + \varepsilon_{21}{}^2 + 2n^2\,\varepsilon_{18}\,\varepsilon_{19}\\
&- 2n^2\,\varepsilon_{20}\,\varepsilon_{21} + n^2\,\varepsilon_{21}{}^2\\
\zeta_{10} = {}&-\varepsilon_8{}^2 + \varepsilon_{10}{}^2 + n^2\varepsilon_{19}{}^2 - n^2\varepsilon_{21}{}^2\\
\zeta_{11} = {}&\varepsilon_{11}{}^2 - \varepsilon_{12}{}^2 + 2\varepsilon_5\,\varepsilon_{12} + 2\varepsilon_6\,\varepsilon_{13} - \varepsilon_{23}{}^2 - 2\varepsilon_{16}\,\varepsilon_{25}\\
&- 2\varepsilon_{22}\,\varepsilon_{24} - 2\varepsilon_{23}\,\varepsilon_{25} + 2n^2\,\varepsilon_{23}\,\varepsilon_{25} + n^2\varepsilon_{24}{}^2 - n^2\varepsilon_{25}{}^2\\
\zeta_{12} = {}&\varepsilon_{12}{}^2 - \varepsilon_{24}{}^2 + \varepsilon_{25}{}^2 - 2\varepsilon_{23}\,\varepsilon_{25} + 2\varepsilon_{11}\,\varepsilon_{13} + n^2\varepsilon_{25}{}^2\\
\zeta_{13} = {}&2\varepsilon_1\,\varepsilon_3 + 2\varepsilon_2\,\varepsilon_6 + 2\varepsilon_4\,\varepsilon_5 + 2\varepsilon_7\,\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_8\,\varepsilon_{13} + 2\varepsilon_9\,\varepsilon_{12}\\
&- 2\varepsilon_{14}\,\varepsilon_{17} - 2\varepsilon_{15}\,\varepsilon_{16} - 2\varepsilon_{18}\,\varepsilon_{23} - 2\varepsilon_{19}\,\varepsilon_{25} - 2\varepsilon_{20}\,\varepsilon_{22}\\
&- 2\varepsilon_{21}\,\varepsilon_{24} + 2n^2\,\varepsilon_{14}\,\varepsilon_{16} + 2n^2\,\varepsilon_{15}\,\varepsilon_{23} + 2n^2\,\varepsilon_{17}\,\varepsilon_{22}\\
&+ 2n^2\,\varepsilon_{18}\,\varepsilon_{25} + 2n^2\,\varepsilon_{20}\,\varepsilon_{24}\\
\zeta_{14} = {}&2\varepsilon_1\,\varepsilon_4 + 2\varepsilon_2\,\varepsilon_3 + 2\varepsilon_5\,\varepsilon_9 + 2\varepsilon_6\,\varepsilon_7 + 2\varepsilon_8\,\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{10}\,\varepsilon_{12}\\
&- 2\varepsilon_{14}\,\varepsilon_{20} - 2\varepsilon_{15}\,\varepsilon_{17} - 2\varepsilon_{16}\,\varepsilon_{18} - 2\varepsilon_{19}\,\varepsilon_{23} - 2\varepsilon_{21}\,\varepsilon_{22}\\
&+ 2n^2\,\varepsilon_{14}\,\varepsilon_{17} + 2n^2\,\varepsilon_{15}\,\varepsilon_{16} + 2n^2\,\varepsilon_{18}\,\varepsilon_{23} + 2n^2\,\varepsilon_{19}\,\varepsilon_{25}\\
&+ 2n^2\,\varepsilon_{20}\,\varepsilon_{22} + 2n^2\,\varepsilon_{21}\,\varepsilon_{24}\\
\zeta_{15} = {}&2\varepsilon_1\,\varepsilon_6 + 2\varepsilon_2\,\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_3\,\varepsilon_5 - 2\varepsilon_{17}\,\varepsilon_{22} + 2\varepsilon_4\,\varepsilon_{12}\\
&+ 2\varepsilon_7\,\varepsilon_{13} - 2\varepsilon_{14}\,\varepsilon_{16} - 2\varepsilon_{15}\,\varepsilon_{23} - 2\varepsilon_{18}\,\varepsilon_{25} - 2\varepsilon_{20}\,\varepsilon_{24}\\
&+ 2n^2\,\varepsilon_{14}\,\varepsilon_{23} + 2n^2\,\varepsilon_{15}\,\varepsilon_{25} + 2n^2\,\varepsilon_{16}\,\varepsilon_{22} + 2n^2\,\varepsilon_{17}\,\varepsilon_{24}
\end{aligned}
\qquad (49)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
{}_{16} &= 2\varepsilon_1\,\varepsilon_9 + 2\varepsilon_2\,\varepsilon_4 + 2\varepsilon_3\,\varepsilon_7 + 2\varepsilon_5\,\varepsilon_{10} + 2\varepsilon_6\,\varepsilon_8 - 2\varepsilon_{14}\,\varepsilon_{21} \\
&\quad - 2\varepsilon_{15}\,\varepsilon_{20} - 2\varepsilon_{16}\,\varepsilon_{19} - 2\varepsilon_{17}\,\varepsilon_{18} + 2n^2\,\varepsilon_{14}\,\varepsilon_{20} \\
&\quad + 2n^2\,\varepsilon_{15}\,\varepsilon_{17} + 2n^2\,\varepsilon_{16}\,\varepsilon_{18} + 2n^2\,\varepsilon_{19}\,\varepsilon_{23} + 2n^2\,\varepsilon_{21}\,\varepsilon_{22} \\
\zeta_{17} &= 2\varepsilon_1\,\varepsilon_{10} + 2\varepsilon_2\,\varepsilon_9 + 2\varepsilon_3\,\varepsilon_8 + 2\varepsilon_4\,\varepsilon_7 - 2\varepsilon_{15}\,\varepsilon_{21} \\
&\quad - 2\varepsilon_{17}\,\varepsilon_{19} - 2\varepsilon_{18}\,\varepsilon_{20} + 2n^2\,\varepsilon_{14}\,\varepsilon_{21} + 2n^2\,\varepsilon_{15}\,\varepsilon_{20} \\
&\quad + 2n^2\,\varepsilon_{16}\,\varepsilon_{19} + 2n^2\,\varepsilon_{17}\,\varepsilon_{18} \\
\zeta_{18} &= 2\varepsilon_1\,\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_2\,\varepsilon_{13} + 2\varepsilon_3\,\varepsilon_{12} + 2\varepsilon_5\,\varepsilon_6 - 2\varepsilon_{14}\,\varepsilon_{23} \\
&\quad - 2\varepsilon_{15}\,\varepsilon_{25} - 2\varepsilon_{16}\,\varepsilon_{22} - 2\varepsilon_{17}\,\varepsilon_{24} + 2n^2\,\varepsilon_{14}\,\varepsilon_{25} \\
&\quad + 2n^2\,\varepsilon_{16}\,\varepsilon_{24} + 2n^2\,\varepsilon_{22}\,\varepsilon_{23} \\
\zeta_{19} &= 2\varepsilon_1\,\varepsilon_{13} + 2\varepsilon_5\,\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_6\,\varepsilon_{12} - 2\varepsilon_{14}\,\varepsilon_{25} - 2\varepsilon_{16}\,\varepsilon_{24} \\
&\quad - 2\varepsilon_{22}\,\varepsilon_{23} + 2n^2\,\varepsilon_{22}\,\varepsilon_{25} + 2n^2\,\varepsilon_{23}\,\varepsilon_{24} \\
\zeta_{20} &= -2\varepsilon_{19}\,\varepsilon_{20} + 2\varepsilon_2\,\varepsilon_{10} + 2\varepsilon_4\,\varepsilon_8 + 2\varepsilon_7\,\varepsilon_9 - 2\varepsilon_{18}\,\varepsilon_{21} \\
&\quad + 2n^2\,\varepsilon_{15}\,\varepsilon_{21} + 2n^2\,\varepsilon_{17}\,\varepsilon_{19} + 2n^2\,\varepsilon_{18}\,\varepsilon_{20} \\
\zeta_{21} &= 2\varepsilon_5\,\varepsilon_{13} + 2\varepsilon_{11}\,\varepsilon_{12} - 2\varepsilon_{22}\,\varepsilon_{25} - 2\varepsilon_{23}\,\varepsilon_{24} + 2n^2\,\varepsilon_{24}\,\varepsilon_{25} \\
\zeta_{22} &= 2\varepsilon_7\,\varepsilon_{10} + 2\varepsilon_8\,\varepsilon_9 - 2\varepsilon_{19}\,\varepsilon_{21} + 2n^2\,\varepsilon_{18}\,\varepsilon_{21} + 2n^2\,\varepsilon_{19}\,\varepsilon_{20} \\
\zeta_{23} &= 2\varepsilon_8\,\varepsilon_{10} + 2n^2\,\varepsilon_{19}\,\varepsilon_{21} \\
\zeta_{24} &= 2\varepsilon_{12}\,\varepsilon_{13} - 2\varepsilon_{24}\,\varepsilon_{25} \\
\zeta_{25} &= \varepsilon_{13}^2 - \varepsilon_{25}^2
\end{aligned}\right\} \quad (49)
$$

Durch Quadrieren der Gleichung (48) erhält man dann unter Berücksichtigung von (49):

$$
\begin{aligned}
&[\zeta_1 \sin^{10} i + \zeta_2 \sin^{12} i + \zeta_3 \sin^{14} i + \zeta_4 \sin^{16} i + \zeta_5 \sin^6 i \\
&\quad + \zeta_6 \sin^8 i + \zeta_7 \sin^{18} i + \zeta_8 \sin^{20} i + \zeta_9 \sin^{22} i + \zeta_{10} \sin^{24} i \\
&+ \zeta_{11} \sin^4 i + \zeta_{12} \sin^2 i + \zeta_{25}] + [\zeta_{13} \sin^{11} i \cos i \\
&\quad + \zeta_{14} \sin^{13} i \cos i + \zeta_{15} \sin^9 i \cos i + \zeta_{16} \sin^{15} i \cos i \\
&+ \zeta_{17} \sin^{17} i \cos i + \zeta_{18} \sin^7 i \cos i + \zeta_{19} \sin^5 i \cos i \\
&\quad + \zeta_{20} \sin^{19} i \cos i + \zeta_{21} \sin^3 i \cos i + \zeta_{22} \sin^{21} i \cos i \\
&\quad + \zeta_{23} \sin^{23} i \cos i + \zeta_{24} \sin i \cos i] = 0 \qquad (50)
\end{aligned}
$$

Man führe folgende Grössen ein:

$$
\left.\begin{aligned}
\eta_1 &= \zeta_{10}^2 + \zeta_{23}^2 \\
\eta_2 &= 2\zeta_9\,\zeta_{11} - \zeta_{23}^2 + 2\zeta_{22}\,\zeta_{23} \\
\eta_3 &= \zeta_9^2 + 2\zeta_8\,\zeta_{10} + \zeta_{22}^2 + 2\zeta_{20}\,\zeta_{23} - 2\zeta_{22}\,\zeta_{23}
\end{aligned}\right\} \quad (51)
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_4 &= 2\zeta_7\,\zeta_{10} + 2\zeta_8\,\zeta_9 - \zeta_{22}^2 + 2\zeta_{17}\,\zeta_{23} + 2\zeta_{20}\,\zeta_{22} - 2\zeta_{20}\,\zeta_{23}\\
\eta_5 &= \zeta_8^2 + 2\zeta_4\,\zeta_{10} + 2\zeta_7\,\zeta_9 + \zeta_{20}^2 + 2\zeta_{16}\,\zeta_{23} + 2\zeta_{17}\,\zeta_{22}\\
&\quad - 2\zeta_{17}\,\zeta_{23} - 2\zeta_{20}\,\zeta_{22}\\
\eta_6 &= 2\zeta_3\,\zeta_{10} + 2\zeta_4\,\zeta_9 + 2\zeta_7\,\zeta_8 - \zeta_{20}^2 + 2\zeta_{14}\,\zeta_{23} + 2\zeta_{16}\,\zeta_{22}\\
&\quad - 2\zeta_{16}\,\zeta_{23} + 2\zeta_{17}\,\zeta_{20} - 2\zeta_{17}\,\zeta_{22}\\
\eta_7 &= \zeta_7^2 + 2\zeta_2\,\zeta_{10} + 2\zeta_3\,\zeta_9 + 2\zeta_4\,\zeta_8 + \zeta_{17}^2 + 2\zeta_{13}\,\zeta_{23}\\
&\quad + 2\zeta_{14}\,\zeta_{22} - 2\zeta_{14}\,\zeta_{23} + 2\zeta_{16}\,\zeta_{20} - 2\zeta_{16}\,\zeta_{22} - 2\zeta_{17}\,\zeta_{20}\\
\eta_8 &= 2\zeta_1\,\zeta_{10} + 2\zeta_2\,\zeta_9 + 2\zeta_3\,\zeta_8 + 2\zeta_4\,\zeta_7 - \zeta_{17}^2 + 2\zeta_{13}\,\zeta_{22}\\
&\quad - 2\zeta_{13}\,\zeta_{23} + 2\zeta_{14}\,\zeta_{20} - 2\zeta_{14}\,\zeta_{22} + 2\zeta_{15}\,\zeta_{23} + 2\zeta_{16}\,\zeta_{17}\\
&\quad - 2\zeta_{16}\,\zeta_{20}\\
\eta_9 &= \zeta_4^2 + 2\zeta_1\,\zeta_9 + 2\zeta_2\,\zeta_8 + 2\zeta_3\,\zeta_7 + 2\zeta_6\,\zeta_{10} + \zeta_{16}^2\\
&\quad + 2\zeta_{13}\,\zeta_{20} - 2\zeta_{13}\,\zeta_{22} + 2\zeta_{14}\,\zeta_{17} - 2\zeta_{14}\,\zeta_{20} + 2\zeta_{15}\,\zeta_{22}\\
&\quad - 2\zeta_{15}\,\zeta_{23} - 2\zeta_{16}\,\zeta_{17} + 2\zeta_{18}\,\zeta_{23}\\
\eta_{10} &= 2\zeta_1\,\zeta_8 + 2\zeta_2\,\zeta_7 + 2\zeta_3\,\zeta_4 + 2\zeta_5\,\zeta_{10} + 2\zeta_6\,\zeta_9 - \zeta_{16}^2\\
&\quad + 2\zeta_{13}\,\zeta_{17} - 2\zeta_{13}\,\zeta_{20} + 2\zeta_{14}\,\zeta_{16} - 2\zeta_{14}\,\zeta_{17} + 2\zeta_{15}\,\zeta_{20}\\
&\quad - 2\zeta_{15}\,\zeta_{22} + 2\zeta_{18}\,\zeta_{22} - 2\zeta_{18}\,\zeta_{23} + 2\zeta_{19}\,\zeta_{23}\\
\eta_{11} &= \zeta_3^2 + 2\zeta_1\,\zeta_7 + 2\,\zeta_2\,\zeta_4 + 2\zeta_5\,\zeta_9 + 2\zeta_6\,\zeta_8 + 2\zeta_{10}\,\zeta_{11}\\
&\quad + \zeta_{14}^2 + 2\zeta_{13}\,\zeta_{16} - 2\zeta_{13}\,\zeta_{17} - 2\zeta_{14}\,\zeta_{16} + 2\zeta_{15}\,\zeta_{17}\\
&\quad - 2\zeta_{15}\,\zeta_{20} + 2\zeta_{18}\,\zeta_{20} - 2\zeta_{18}\,\zeta_{22} + 2\zeta_{19}\,\zeta_{22} - 2\zeta_{19}\,\zeta_{23}\\
&\quad + 2\zeta_{21}\,\zeta_{23}\\
\eta_{12} &= 2\zeta_1\,\zeta_4 + 2\zeta_2\,\zeta_3 + 2\zeta_5\,\zeta_8 + 2\zeta_6\,\zeta_7 + 2\zeta_9\,\zeta_{11}\\
&\quad + 2\zeta_{10}\,\zeta_{12} - \zeta_{14}^2 + 2\zeta_{13}\,\zeta_{14} - 2\zeta_{13}\,\zeta_{16} + 2\zeta_{15}\,\zeta_{16}\\
&\quad + 2\zeta_{17}\,\zeta_{18} - 2\zeta_{18}\,\zeta_{20} + 2\zeta_{19}\,\zeta_{20} - 2\zeta_{19}\,\zeta_{22} + 2\zeta_{21}\,\zeta_{22}\\
&\quad - 2\zeta_{15}\,\zeta_{17} - 2\zeta_{21}\,\zeta_{23} - 2\zeta_{23}\,\zeta_{24}\\
\eta_{13} &= \zeta_2^2 + 2\zeta_1\,\zeta_3 + 2\zeta_4\,\zeta_6 + 2\zeta_5\,\zeta_7 + 2\zeta_8\,\zeta_{11} + 2\zeta_9\,\zeta_{12}\\
&\quad + 2\zeta_{10}\,\zeta_{25} + \zeta_{13}^2 - 2\zeta_{13}\,\zeta_{14} + 2\zeta_{14}\,\zeta_{15} - 2\zeta_{15}\,\zeta_{16}\\
&\quad + 2\zeta_{16}\,\zeta_{18} - 2\zeta_{17}\,\zeta_{18} + 2\zeta_{17}\,\zeta_{19} - 2\zeta_{19}\,\zeta_{20} + 2\zeta_{20}\,\zeta_{21}\\
&\quad - 2\zeta_{21}\,\zeta_{22} - 2\,\zeta_{23}\,\zeta_{24} + 2\zeta_{22}\,\zeta_{24}\\
\eta_{14} &= 2\zeta_1\,\zeta_2 + 2\zeta_3\,\zeta_6 + 2\zeta_4\,\zeta_5 + 2\zeta_7\,\zeta_{11} + 2\zeta_8\,\zeta_{12} + 2\zeta_9\,\zeta_{25}\\
&\quad - \zeta_{13}^2 + 2\zeta_{13}\,\zeta_{15} - 2\zeta_{14}\,\zeta_{15} + 2\zeta_{14}\,\zeta_{18} - 2\zeta_{16}\,\xi_{18}\\
&\quad + 2\zeta_{16}\,\zeta_{19} - 2\zeta_{17}\,\zeta_{19} + 2\zeta_{17}\,\zeta_{21} - 2\zeta_{20}\,\zeta_{21} + 2\zeta_{20}\,\xi_{24}\\
&\quad - 2\zeta_{22}\,\zeta_{24}\\
\eta_{15} &= \zeta_1^2 + 2\zeta_2\,\zeta_6 + 2\zeta_3\,\zeta_5 + 2\zeta_4\,\zeta_{11} + 2\zeta_7\,\zeta_{12} + 2\zeta_8\,\zeta_{25}\\
&\quad + \zeta_{15}^2 - 2\zeta_{13}\,\zeta_{15} + 2\zeta_{13}\,\zeta_{18} - 2\zeta_{14}\,\zeta_{18} + 2\zeta_{14}\,\zeta_{19}\\
&\quad - 2\zeta_{16}\,\zeta_{19} + 2\zeta_{16}\,\zeta_{21} - 2\zeta_{17}\,\zeta_{21} + 2\zeta_{17}\,\zeta_{24} - 2\zeta_{20}\,\zeta_{24}
\end{aligned}
\qquad (51)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\eta_{16} &= 2\zeta_1\zeta_6 + 2\zeta_2\zeta_5 + 2\zeta_3\zeta_{11} + 2\zeta_4\zeta_{12} + 2\zeta_7\zeta_{25} - \zeta_{15}^2 \\
&\quad - 2\zeta_{13}\zeta_{18} + 2\zeta_{13}\zeta_{19} - 2\zeta_{14}\zeta_{19} + 2\zeta_{14}\zeta_{21} + 2\zeta_{15}\zeta_{18} \\
&\quad - 2\zeta_{16}\zeta_{21} + 2\zeta_{16}\zeta_{24} - 2\zeta_{17}\zeta_{24} \\
\eta_{17} &= \zeta_6^2 + 2\zeta_1\zeta_5 + 2\zeta_2\zeta_{11} + 2\zeta_{13}\zeta_{12} + 2\zeta_4\zeta_{25} + \zeta_{18}^2 \\
&\quad - 2\zeta_{13}\zeta_{19} + 2\zeta_{13}\zeta_{21} - 2\zeta_{14}\zeta_{21} + 2\zeta_{14}\zeta_{24} - 2\zeta_{15}\zeta_{18} \\
&\quad + 2\zeta_{15}\zeta_{19} - 2\zeta_{16}\zeta_{24} \\
\eta_{18} &= 2\zeta_1\zeta_{11} + 2\zeta_2\zeta_{12} + 2\zeta_3\zeta_{25} + 2\zeta_5\zeta_6 - \zeta_{18}^2 - 2\zeta_{13}\zeta_{21} \\
&\quad + 2\zeta_{13}\zeta_{24} - 2\zeta_{14}\zeta_{24} - 2\zeta_{15}\zeta_{19} + 2\zeta_{15}\zeta_{21} + 2\zeta_{18}\zeta_{19} \\
\eta_{19} &= \zeta_5^2 + 2\zeta_1\zeta_{12} + 2\zeta_2\zeta_{25} + 2\zeta_6\zeta_{11} + \zeta_{19}^2 - 2\zeta_{13}\zeta_{24} \\
&\quad - 2\zeta_{15}\zeta_{21} + 2\zeta_{15}\zeta_{24} - 2\zeta_{18}\zeta_{19} + 2\zeta_{18}\zeta_{21} \\
\eta_{20} &= 2\zeta_1\zeta_{25} + 2\zeta_5\zeta_{11} + 2\zeta_6\zeta_{12} - \zeta_{19}^2 - 2\zeta_{15}\zeta_{24} \\
&\quad - 2\zeta_{18}\zeta_{21} + 2\zeta_{18}\zeta_{24} + 2\zeta_{19}\zeta_{21} \\
\eta_{21} &= \zeta_{11}^2 + 2\zeta_5\zeta_{12} + 2\zeta_6\zeta_{25} + \zeta_{21}^2 - 2\zeta_{18}\zeta_{24} - 2\zeta_{19}\zeta_{21} \\
&\quad + 2\zeta_{19}\zeta_{24} \\
\eta_{22} &= 2\zeta_5\zeta_{25} + 2\zeta_{11}\zeta_{12} - \zeta_{21}^2 - 2\zeta_{19}\zeta_{24} + 2\zeta_{21}\zeta_{24} \\
\eta_{23} &= \zeta_{12}^2 + 2\zeta_{11}\zeta_{25} + \zeta_{24}^2 - 2\zeta_{21}\zeta_{24} \\
\eta_{24} &= 2\zeta_{12}\zeta_{25} - \zeta_{24}^2 \\
\eta_{25} &= \zeta_{25}^2
\end{aligned}\right\} \quad (51)
$$

Durch Quadieren der Gleichung (50) erhält man dann unter Berücksichtigung von (51), wenn man noch setzt (siehe Gl. 26).

$$\Delta = \sin^2 i = \sin^2 i_1' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\eta_1\Delta^{24} + \eta_2\Delta^{23} + \eta_3\Delta^{22} + \eta_4\Delta^{21} + \eta_5\Delta^{20} + \eta_6\Delta^{19} \\
&+ \eta_7\Delta^{18} + \eta_8\Delta^{17} + \eta_9\Delta^{16} + \eta_{10}\Delta^{15} + \eta_{11}\Delta^{14} \\
&+ \eta_{12}\Delta^{13} + \eta_{13}\Delta^{12} + \eta_{14}\Delta^{11} + \eta_{15}\Delta^{10} + \eta_{16}\Delta^9 \\
&+ \eta_{17}\Delta^8 + \eta_{18}\Delta^7 + \eta_{19}\Delta^6 + \eta_{20}\Delta^5 + \eta_{21}\Delta^4 \\
&+ \eta_{22}\Delta^3 + \eta_{23}\Delta^2 + \eta_{24}\Delta + \eta_{25} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (53)
$$

Dividiert man die Gleichung durch $\eta_1$, und setzt man die einzelnen Faktoren

$$\frac{\eta_\varkappa}{\eta_1} = \vartheta_{\varkappa-1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

so heisst die Bedingungsgleichung für die Spitze der Kaustik:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathcal{A}^{24} + \vartheta_1 \mathcal{A}^{23} + \vartheta_2 \mathcal{A}^{22} + \vartheta_3 \mathcal{A}^{21} + \vartheta_4 \mathcal{A}^{20} + \vartheta_5 \mathcal{A}^{19} \\
&+ \vartheta_6 \mathcal{A}^{18} + \vartheta_7 \mathcal{A}^{17} + \vartheta_8 \mathcal{A}^{16} + \vartheta_9 \mathcal{A}^{15} + \vartheta_{10} \mathcal{A}^{14} \\
&+ \vartheta_{11} \mathcal{A}^{13} + \vartheta_{12} \mathcal{A}^{12} + \vartheta_{13} \mathcal{A}^{11} + \vartheta_{14} \mathcal{A}^{10} + \vartheta_{15} \mathcal{A}^{9} \\
&+ \vartheta_{16} \mathcal{A}^{8} + \vartheta_{17} \mathcal{A}^{7} + \vartheta_{18} \mathcal{A}^{6} + \vartheta_{19} \mathcal{A}^{5} + \vartheta_{20} \mathcal{A}^{4} \\
&+ \vartheta_{21} \mathcal{A}^{3} + \vartheta_{22} \mathcal{A}^{2} + \vartheta_{23} \mathcal{A} + \vartheta_{24} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (55)$$

Man führe noch folgende Grössen ein:

$$c_3 = \cos 2\varphi = c_2^2 - c_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

$$\left.\begin{aligned}
\nu_1 &= 3n^3 + 3n & \nu_{13} &= 48n^5 + 8n^7 \\
\nu_2 &= n^4 + n^2 & \nu_{14} &= 4n^3 + 3n \\
\nu_3 &= 2n^2 + 6n^4 & \nu_{15} &= 48n^6 + 8n^4 \\
\nu_4 &= 3n^5 + 3n^3 = n^2\nu_1 & \nu_{16} &= 20n^6 + 20n^4 = 20n^2\nu_2 \\
\nu_5 &= 2n^5 + 6n^3 & \nu_{17} &= n^3 + n = {}^1/_3\nu_1 \\
\nu_6 &= n^2 + 1 & \nu_{18} &= 6n^6 + 6n^4 = 6n^2\nu_2 \\
\nu_7 &= 9n^3 + 9n^5 = 3n^2\nu_1 & \nu_{19} &= 6n^4 + 2n^6 \\
\nu_8 &= 46n^5 + 6n_3 + 6n^7 & \nu_{20} &= 6n^5 + 2n^3 \\
\nu_9 &= 4n^2 + 4n^4 = 4\nu_2 & \nu_{21} &= 2n^5 + 2n^3 = 2n\nu_2 \\
\nu_{10} &= 6n^3 + 6n = 2\nu_1 & \nu_{22} &= 10n^3 + 10n = 10\nu_{17} \\
\nu_{11} &= 6n^7 + 6n^5 = 20n^4\nu_1 & \nu_{23} &= 3n^2 + 3 = 3\nu_6 \\
\nu_{12} &= 4n^2 + 3n^4
\end{aligned}\right\} \quad (57)$$

Dann nehmen die Ausdrücke (29), (31), (33), (36), (39), (41), (43), (45) folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= c_2\,\nu_1 & \alpha_6 &= c_1\,c_2\,\nu_3 \\
\alpha_2 &= 1 - n^2\,c_1^2 & \alpha_7 &= -\,c_3\,\nu_4 \\
\alpha_3 &= 2n^4\,c_3 & \alpha_8 &= -\,c_1\,c_2\,\nu_5 \\
\alpha_4 &= -\,c_3\,\nu_2 & \alpha_9 &= -\,c_2\,\nu_6 \\
\alpha_5 &= 2n^3\,c_3 & \alpha_{10} &= c_1\,\nu_6
\end{aligned}\right\} \quad (58)$$

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1\,\alpha_2 - 5n\,c_2\,\alpha_4 + 3c_2\,\alpha_7 - c_1^2\,c_2\,\nu_7\\
\beta_2 &= -4n^3\,c_2\,\alpha_2 - 8n\,c_2\,\alpha_3 + \alpha_1\,\alpha_4 - n^2\,c_2\,\alpha_5\\
&\quad - 3n^2\,c_1\,\alpha_8 + c_2\,\alpha_4\,\nu_1 + c_1^2\,c_2\,\nu_8 + 3n\,c_1\,\alpha_6\\
\beta_3 &= -4n^3\,c_1\,\alpha_2 + 6n\,c_1\,\alpha_4 - 6n^2\,c_1\,\alpha_5 - 2n^2\,c_1\,c_2\,\alpha_1\\
&\quad - 3n\,c_2\,\alpha_6 + 2n^5\,c_1\,c_2^2\\
\beta_4 &= -2n\,c_2\,\alpha_2 + 3c_2\,\alpha_5\\
\beta_5 &= 3n\,c_1\,\alpha_2 + 3c_2\,\alpha_8 + 7n^3\,c_1\,c_2^2\\
\beta_6 &= \alpha_1\,\alpha_3 - 7n^3\,c_2\,\alpha_4 + c_2\,\alpha_5\,\nu_9 - 3n^2\,c_2\,\alpha_7 + 3n^2\,c_1\,\alpha_8\\
&\quad + c_2\,\alpha_3\,\nu_{10} - 3n^3\,c_1\,\alpha_6 - c_1^2\,c_2\,\nu_{11}\\
\beta_7 &= -10n^3\,c_2\,\alpha_3 - 10n^4\,c_2\,\alpha_5 + 80n^7\,c_1^2\,c_2\\
\beta_8 &= -10n^3\,c_1\,\alpha_3 - 10n^4\,c_1\,\alpha_5 + 80n^7\,c_1\,c_2^2\\
\beta_9 &= 9n\,c_1\,\alpha_3 - 7n^3\,c_1\,\alpha_4 + c_1\,\alpha_5\,\nu_{12} - 3n^2\,c_2\,\alpha_8\\
&\quad - 3n^2\,c_1\,\alpha_7 + 3n^3\,c_2\,\alpha_6 + c_1\,c_2^2\,\nu_{13} + 4n^4\,c_1\,c_2\,\alpha_1\\
\beta_{10} &= 3n^3\,c_1\,c_2^2\\
\beta_{11} &= -4n^2\,c_2\,\alpha_2 - 5n\,c_2\,\alpha_5 + 6c_2\,\alpha_3 + 18n^4\,c_1^2\,c_2\\
\beta_{12} &= -3n^2\,c_1\,\alpha_2 + 3c_2\,\alpha_6 - 7n^4\,c_1\,c_2^2\\
\beta_{13} &= 4n^2\,c_1\,\alpha_2 - 6n^2\,c_1\,\alpha_4 + 6n\,c_1\,\alpha_5 - 3n\,c_2\,\alpha_8\\
&\quad + 2n^3\,c_1\,c_2\,\alpha_1 - 2n^4\,c_1\,c_2^2\\
\beta_{14} &= \frac{1}{n}\,\beta_7\\
\beta_{15} &= -9n^2\,c_1\,\alpha_3 + 7n^2\,c_1\,\alpha_4 - 4n^3\,c_1\,c_2\,\alpha_1 - c_1\,\alpha_5\,\nu_{14}\\
&\quad + 3n\,c_2\,\alpha_8 + 3n\,c_1\,\alpha_7 - 3n^2\,c_2\,\alpha_6 - c_1\,c_2^2\,\nu_{15}\\
\beta_{16} &= -\frac{1}{n}\,\beta_8\\
\beta_{17} &= -7n^2\,c_2\,\alpha_4 + \alpha_1\,\alpha_5 - 3n\,c_2\,\alpha_7 + 3n\,c_1\,\alpha_8\\
&\quad - 3n^2\,c_1\,\alpha_6 - c_1^2\,c_2\,\nu_{16}\\
\beta_{18} &= 3c_2\,\alpha_4\\
\beta_{19} &= -3n^2\,c_1\,c_2^2
\end{aligned}
\qquad (59)
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= c_2\,\alpha_2\\
\gamma_2 &= c_2\,\alpha_3 - n^2\,c_2\,\alpha_2\\
&\quad - nc_2\,\alpha_5 + 4n^4\,c_1^2\,c_2\\
\gamma_3 &= c_2\,\alpha_4\\
\gamma_4 &= -2n^2\,c_1\,c_2^2\\
\gamma_5 &= -n^2\,c_1\,\alpha_2 + 2n^4\,c_1\,c_2^2\\
\gamma_6 &= -n^2\,c_2\,\alpha_3 - n^3\,c_2\,\alpha_5\\
&\quad + 8n^6\,c_1^2\,c_2\\
\gamma_7 &= -n^2\,c_2\,\alpha_4 + c_2\,\alpha_5\,\nu_{17}\\
&\quad - c_1^2\,c_2\,\nu_{18}\\
\gamma_8 &= -n^2\,c_1\,\alpha_4 + nc_1\,\alpha_5\\
&\quad + c_1\,c_2^2\,\nu_{19}
\end{aligned}
\qquad (60)
$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\gamma_9 = -n^2 c_1 \alpha_3 - n^3 c_1 \alpha_5 & \gamma_{14} = -n^2 c_2 \alpha_5 - n c_2 \alpha_3 \\
\quad - 8n^6 c_1 c_2^2 & \quad + 8n^5 c_1^2 c_2 \\
\gamma_{10} = n c_1 \alpha_2 - 2n^3 c_1 c_2^2 & \gamma_{15} = -n^2 c_1 \alpha_5 + n c_1 \alpha_4 \\
\gamma_{11} = c_2 \alpha_5 - n c_2 \alpha_2 & \quad - c_1 c_2^2 \nu_{20} \\
\gamma_{12} = 2n^3 c_1 c_2^2 & \gamma_{16} = -n c_2 \alpha_4 - c_1^2 c_2 \nu_{21} \\
\gamma_{13} = n^2 c_1 \alpha_5 + n c_1 \alpha_3 + 8n^5 c_1 c_2^2 &
\end{array}\right\} \quad (60)$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\delta_1 = 3n \alpha_9 - 7n c_2 & \delta_7 = -\frac{1}{n} \delta_2 \\
\delta_2 = 14n^3 c_2 & \\
\delta_3 = c_1 \nu_{22} & \delta_8 = \frac{1}{n} \delta_4 \\
\delta_4 = -14n^3 c_1 & \\
\delta_5 = -6n c_1 & \delta_9 = c_1 \nu_{23} \\
\delta_6 = -3\alpha_9 + 7n^2 c_2 &
\end{array}\right\} \quad (61)$$

Wir sind also zu folgendem Resultat gekommen:

Um zu untersuchen, unter welcher Bedingung ein Lichtstrahl nach der Brechung durch eine halbkugelförmige Konvexplanlinse durch die Spitze der Kaustik geht, berechne man zunächst nach (57) die Grössen $\nu$ aus dem Brechungsexponenten n der Linsensubstanz. Aus dem Winkel $\varphi$, den die einfallenden Lichtstrahlen mit der optischen Achse bilden, berechne man die Grössen c gemäss (27) und (56). Aus diesen Grössen $\nu$ und c ergeben sich die Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\zeta$, $\eta$, $\vartheta$ aus (58), (59), (60), (61), (47), (49), (51), (54). Dann liefert die Gleichung (55) die Bedingung für die Spitze der Kaustik, wenn $\triangle = \sin^2 i_1'$ ist, wo $i_1'$ der Brechungswinkel an der ersten Linsenfläche ist.

## § 3. Die Spitze der Kaustik für die zwei Fälle $\varphi = 0^0$, $\varphi = 5^0$.

I. $\varphi = 0^0$. Die Bedingungsgleichung für die Spitze der

Kaustik — Gleichung (55) — soll zunächst angewendet werden auf den Fall $\varphi = 0^0$ d. h. auf den Fall achsenparalleler Strahlen. In dem Fall muss sich, sofern Gleichung (55) richtig sein soll, $i_1' = 0$ ergeben, denn aus Symmetriegründen liegt die Spitze der Kaustik auf der optischen Achse.

Ist der Brechungsexponent der Linse $n = 1{,}6$, so ergeben sich aus (57) folgende Werte:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\nu_1$ | = 17,0880 | $\nu_{13}$ | = 718,0600 |
| $\nu_2$ | = 9,1136 | $\nu_{14}$ | = 21,1840 |
| $\nu_3$ | = 44,4416 | $\nu_{15}$ | = 857,7290 |
| $\nu_4$ | = 43,7450 | $\nu_{16}$ | = 466,6000 |
| $\nu_5$ | = 45,5470 | $\nu_{17}$ | = 2,5756 |
| $\nu_6$ | = 3,5600 | $\nu_{18}$ | = 139,9850 |
| $\nu_7$ | = 131,2400 | $\nu_{19}$ | = 72,8770 |
| $\nu_8$ | = 667,9760 | $\nu_{20}$ | = 71,1060 |
| $\nu_9$ | = 36,4550 | $\nu_{21}$ | = 29,1630 |
| $\nu_{10}$ | = 34,1750 | $\nu_{22}$ | = 25,7560 |
| $\nu_{11}$ | = 2239,7500 | $\nu_{23}$ | = 10,6800 |
| $\nu_{12}$ | = 29,9008 | | |

Aus (27) und (56) folgt:

$$c_1 = 0$$
$$c_2 = 1$$
$$c_3 = 1$$

Aus diesen Werten $\nu$ und c ergeben sich die Grössen $\alpha$ gemäss (58):

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\alpha_1$ | = 24,4610 | $\alpha_6$ | = 0 |
| $\alpha_2$ | = 1 | $\alpha_7$ | = — 51,1180 |
| $\alpha_3$ | = 13,1070 | $\alpha_8$ | = 0 |
| $\alpha_4$ | = — 9,1136 | $\alpha_9$ | = — 3,5600 |
| $\alpha_5$ | = 8,1920 | $\alpha_{10}$ | = 0 |

Aus (59) ergeben sich die Werte für $\beta$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\beta_1$ = | 250,723 | $\beta_{11}$ = | 2,866 |
| $\beta_2$ = — | 583,739 | $\beta_{12}$ = | 0 |
| $\beta_3$ = | 0 | $\beta_{13}$ = | 0 |
| $\beta_4$ = | 21,276 | $\beta_{14}$ = — | 671,100 |
| $\beta_5$ | 0 | $\beta_{15}$ = | 0 |
| $\beta_6$ = | 1720,816 | $\beta_{16}$ = | 0 |
| $\beta_7$ = — | 1073,760 | $\beta_{17}$ = | 609,071 |
| $\beta_8$ = | 0 | $\beta_{18}$ = — | 27,341 |
| $\beta_9$ = | 0 | $\beta_{19}$ = | 0 |
| $\beta_{10}$ = | 0 | | |

Aus (60) ergeben sich die Werte:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\gamma_1$ = | 1 | $\gamma_9$ = | 0 |
| $\gamma_2$ = — | 2,5600 | $\gamma_{10}$ = | 0 |
| $\gamma_3$ = — | 9,1136 | $\gamma_{11}$ = | 6,592 |
| $\gamma_4$ = | 0 | $\gamma_{12}$ = | 0 |
| $\gamma_5$ = | 0 | $\gamma_{13}$ = | 0 |
| $\gamma_6$ = — | 54,5250 | $\gamma_{14}$ = — | 41,941 |
| $\gamma_7$ = | 23,3310 | $\gamma_{15}$ = | 0 |
| $\gamma_8$ = | 0 | $\gamma_{16}$ = | 14,581 |

Aus (61) ergeben sich die Werte:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\delta_1$ = — | 28,288 | $\delta_6$ = | 28,600 |
| $\delta_2$ = | 57,344 | $\delta_7$ = — | 35,840 |
| $\delta_3$ = | 0 | $\delta_8$ = | 0 |
| $\delta_4$ = | 0 | $\delta_9$ = | 0 |
| $\delta_5$ = | 0 | | |

Aus (47) ergeben sich die Werte:

$$\varepsilon_1 = 1117{,}3 \qquad \varepsilon_{14} = -\ 945{,}3$$
$$\varepsilon_2 = -\ 3851{,}3 \qquad \varepsilon_{15} = 3355{,}2$$
$$\varepsilon_3 = 0 \qquad \varepsilon_{16} = 0$$
$$\varepsilon_4 = 0 \qquad \varepsilon_{17} = 0$$
$$\varepsilon_5 = 190{,}18 \qquad \varepsilon_{18} = -\ 4859{,}3$$
$$\varepsilon_6 = 0 \qquad \varepsilon_{19} = 2061{,}6$$
$$\varepsilon_7 = 6769{,}8 \qquad \varepsilon_{20} = 0$$
$$\varepsilon_8 = 3298{,}2 \qquad \varepsilon_{21} = 0$$
$$\varepsilon_9 = 0 \qquad \varepsilon_{22} = 208{,}58$$
$$\varepsilon_{10} = 0 \qquad \varepsilon_{23} = 0$$
$$\varepsilon_{11} = 0 \qquad \varepsilon_{24} = 5{,}601$$
$$\varepsilon_{12} = -\ 15{,}458 \qquad \varepsilon_{25} = 0$$
$$\varepsilon_{13} = 0$$

Gemäss (49) ergibt sich:

$$\zeta_1 = -\ 342\,325{,}2 \qquad \zeta_{14} = 0$$
$$\zeta_2 = 495\,729{,}5 \qquad \zeta_{15} = 0$$
$$\zeta_3 = -\ 379\,038{,}0 \qquad \zeta_{16} = 0$$
$$\zeta_4 = 314\,980{,}0 \qquad \zeta_{17} = 0$$
$$\zeta_5 = -\ 31\,188{,}0 \qquad \zeta_{18} = 0$$
$$\zeta_6 = 133\,482{,}4 \qquad \zeta_{19} = 0$$
$$\zeta_7 = -\ 155\,550{,}0 \qquad \zeta_{20} = 0$$
$$\zeta_8 = 9\,500{,}0 \qquad \zeta_{21} = 0$$
$$\zeta_9 = -\ 8\,620{,}0 \qquad \zeta_{22} = 0$$
$$\zeta_{10} = 2\,550{,}0 \qquad \zeta_{23} = 0$$
$$\zeta_{11} = 3\,384{,}4 \qquad \zeta_{24} = 0$$
$$\zeta_{12} = 207{,}6 \qquad \zeta_{25} = 0$$
$$\zeta_{13} = 0$$

Aus Gleichung (50) ergibt sich dann die Bedingungsgleichung für die Spitze der Kaustik, wenn man nach Potenzen von $\triangle$ ordnet und die Gleichung durch $\zeta_{10}$ dividiert:

$$\Delta^{12} - 3{,}38\,\Delta^{11} + 3{,}73\,\Delta^{10} - 59{,}43\,\Delta^{9} + 123{,}52\,\Delta^{8}$$
$$- 148{,}64\,\Delta^{7} + 194{,}40\,\Delta^{6} - 134{,}25\,\Delta^{5} + 52{,}11\,\Delta^{4}$$
$$- 12{,}23\,\Delta^{3} + 1{,}33\,\Delta^{2} + 0{,}08\,\Delta = 0$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist also $\triangle = 0$, d. h. gemäss Gleichung (26) $i_1' = 0$; es ergibt sich also, wie zu erwarten war, dass für $\varphi = 0^0$ die Spitze der Kaustik auf der optischen Achse gelegen ist.

II. $\varphi = 5^0$. Für diesen wie für jeden andern Fall bleiben die Grössen $\nu$, die nur vom Brechungsexponenten der Linsensubstanz abhängig sind, dieselben wie bei dem Fall $\varphi = 0^0$.

Aus (27) und (56) folgt:

$$c_1 = 0{,}187\,156$$
$$c_2 = 0{,}996\,180$$
$$c_3 = 0{,}984\,800$$

Aus (58) folgt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\alpha_1 =$ | 17,0230 | $\alpha_6 =$ | 3,8586 |
| $\alpha_2 =$ | 0,9806 | $\alpha_7 =$ | — 43,0800 |
| $\alpha_3 =$ | 12,9080 | $\alpha_8 =$ | — 3,9545 |
| $\alpha_4 =$ | — 8,9752 | $\alpha_9 =$ | — 3,5464 |
| $\alpha_5 =$ | 8,0675 | $\alpha_{10} =$ | 0,3103 |

Aus (59) folgt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\beta_1 =$ | — 104,899 | $\beta_{11} =$ | 3,748 |
| $\beta_2 =$ | — 497,412 | $\beta_{12} =$ | 6,908 |
| $\beta_3 =$ | — 43,914 | $\beta_{13} =$ | 49,525 |
| $\beta_4 =$ | 20,984 | $\beta_{14} =$ | — 648,190 |
| $\beta_5 =$ | 8,928 | $\beta_{15} =$ | — 219,690 |
| $\beta_6 =$ | 1514,371 | $\beta_{16} =$ | 173,690 |
| $\beta_7 =$ | — 1037,149 | $\beta_{17} =$ | 495,782 |
| $\beta_8 =$ | — 277,902 | $\beta_{18} =$ | — 26,823 |
| $\beta_9 =$ | 266,829 | $\beta_{19} =$ | — 0,664 |
| $\beta_{10} =$ | 1,063 | | |

Aus (60) folgen die Werte:

$$\gamma_1 = 0{,}9768 \qquad \gamma_9 = -17{,}3690$$
$$\gamma_2 = -2{,}3023 \qquad \gamma_{10} = -0{,}5718$$
$$\gamma_3 = -8{,}9408 \qquad \gamma_{11} = 6{,}4740$$
$$\gamma_4 = -0{,}4428 \qquad \gamma_{12} = 0{,}7086$$
$$\gamma_5 = 0{,}9149 \qquad \gamma_{13} = 10{,}8560$$
$$\gamma_6 = -64{,}8200 \qquad \gamma_{14} = -40{,}5130$$
$$\gamma_7 = 42{,}5290 \qquad \gamma_{15} = -9{,}2018$$
$$\gamma_8 = 9{,}4308 \qquad \gamma_{16} = -14{,}5260$$

Aus (61) folgt:

$$\delta_1 = -28{,}180 \qquad \delta_6 = 7{,}213$$
$$\delta_2 = 57{,}126 \qquad \delta_7 = -35{,}703$$
$$\delta_3 = 2{,}245 \qquad \delta_8 = -3{,}124$$
$$\delta_4 = -4{,}998 \qquad \delta_9 = 0{,}931$$
$$\delta_5 = -0{,}837$$

Aus (47) folgt:

$$\varepsilon_1 = 890{,}115 \qquad \varepsilon_{14} = -1\,548{,}053$$
$$\varepsilon_2 = -6\,787{,}765 \qquad \varepsilon_{15} = 6\,489{,}115$$
$$\varepsilon_3 = -1\,067{,}748 \qquad \varepsilon_{16} = -95{,}087$$
$$\varepsilon_4 = 3\,284{,}500 \qquad \varepsilon_{17} = 1\,003{,}505$$
$$\varepsilon_5 = -45{,}941 \qquad \varepsilon_{18} = -7\,569{,}698$$
$$\varepsilon_6 = 86{,}748 \qquad \varepsilon_{19} = 1\,937{,}058$$
$$\varepsilon_7 = 11\,167{,}420 \qquad \varepsilon_{20} = -1\,753{,}675$$
$$\varepsilon_8 = -3\,099{,}160 \qquad \varepsilon_{21} = 705{,}050$$
$$\varepsilon_9 = -3\,590{,}270 \qquad \varepsilon_{22} = -90{,}188$$
$$\varepsilon_{10} = 1\,128{,}050 \qquad \varepsilon_{23} = 4{,}7699$$
$$\varepsilon_{11} = 1{,}974 \qquad \varepsilon_{24} = 26{,}903$$
$$\varepsilon_{12} = -15{,}742 \qquad \varepsilon_{25} = 0{,}7849$$
$$\varepsilon_{13} = -0{,}241$$

Aus (49) ergibt sich:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\zeta_1$ | 1 813 054,40 | $\zeta_{14}$ | — 7 608 324,50 |
| $\zeta_2$ | 6 254 444,44 | $\zeta_{15}$ | 218 275,74 |
| $\zeta_3$ | — 32 273 839,85 | $\zeta_{16}$ | 15 483 511,00 |
| $\zeta_4$ | 45 486 723,16 | $\zeta_{17}$ | — 12 556 065,00 |
| $\zeta_5$ | 35 099,31 | $\zeta_{18}$ | — 55 648,71 |
| $\zeta_6$ | — 674 408,22 | $\zeta_{19}$ | 5 395,09 |
| $\zeta_7$ | — 23 589 040,00 | $\zeta_{20}$ | 2 956 400,00 |
| $\zeta_8$ | 3 892 570,00 | $\zeta_{21}$ | — 46,91 |
| $\zeta_9$ | — 7 310,00 | $\zeta_{22}$ | — 1 040,00 |
| $\zeta_{10}$ | 1 220,00 | $\zeta_{23}$ | 270,00 |
| $\zeta_{11}$ | 8 017,64 | $\zeta_{24}$ | — 34,63 |
| $\zeta_{12}$ | — 482,20 | $\zeta_{25}$ | — 0,56 |
| $\zeta_{13}$ | 1 011 194,63 | | |

Aus (51) folgt:

| | |
|---|---|
| $\eta_1$ | 1 561 298,3 |
| $\eta_2$ | — 118 176 478,3 |
| $\eta_3$ | 11 151 356 450,0 |
| $\eta_4$ | — 132 548 434 570,0 |
| $\eta_5$ | 24 103 898 760 000,0 |
| $\eta_6$ | — 267 472 417 400 000,0 |
| $\eta_7$ | 1 234 573 104 085 000,0 |
| $\eta_8$ | — 3 080 388 115 735 000,0 |
| $\eta_9$ | 4 510 994 639 469 200,0 |
| $\eta_{10}$ | 10 195 953 126 050,0 |
| $\eta_{11}$ | 1 863 698 423 384 316,7 |
| $\eta_{12}$ | — 297 260 422 045 559,7 |
| $\eta_{13}$ | — 135 024 842 964 123,96 |
| $\eta_{14}$ | 74 635 242 651 963,2 |
| $\eta_{15}$ | — 9 264 347 675 320,0 |
| $\eta_{16}$ | — 2 451 425 552 500,0 |
| $\eta_{17}$ | 733 158 291 600,0 |

$$\eta_{18} = - \quad 30\,820\,305\,200{,}0$$
$$\eta_{19} = - \quad 10\,632\,088\,040{,}0$$
$$\eta_{20} = \quad 1\,195\,744\,740{,}0$$
$$\eta_{21} = \quad 27\,464\,107{,}0$$
$$\eta_{22} = - \quad 7\,399\,242{,}7$$
$$\eta_{23} = \quad 221\,516{,}9$$
$$\eta_{24} = - \quad 661{,}3$$
$$\eta_{25} = \quad 0{,}31$$

Aus diesen Grössen $\eta$ ergibt sich nach (54):

$$\vartheta_1 = - \quad 75{,}69 \qquad \vartheta_{13} = \quad 47\,803\,000{,}0$$
$$\vartheta_2 = \quad 7\,142{,}1 \qquad \vartheta_{14} = - \quad 5\,933\,800{,}0$$
$$\vartheta_3 = - \quad 84\,903{,}6 \qquad \vartheta_{15} = - \quad 1\,570\,100{,}0$$
$$\vartheta_4 = \quad 15\,438\,500{,}0 \qquad \vartheta_{16} = \quad 469\,580{,}0$$
$$\vartheta_5 = - \quad 171\,310\,000{,}0 \qquad \vartheta_{17} = - \quad 19\,739{,}8$$
$$\vartheta_6 = \quad 790\,890\,000{,}0 \qquad \vartheta_{18} = - \quad 6\,809{,}7$$
$$\vartheta_7 = - \quad 1\,972\,960\,000{,}0 \qquad \vartheta_{19} = \quad 765{,}84$$
$$\vartheta_8 = \quad 2\,889\,240\,000{,}0 \qquad \vartheta_{20} = \quad 17{,}59$$
$$\vartheta_9 = \quad 6\,530\,500{,}0 \qquad \vartheta_{21} = - \quad 4{,}74$$
$$\vartheta_{10} = \quad 1\,193\,700\,000{,}0 \qquad \vartheta_{22} = \quad 0{,}142$$
$$\vartheta_{11} = - \quad 190\,390\,000{,}0 \qquad \vartheta_{23} = - \quad 0{,}000\,424$$
$$\vartheta_{12} = - \quad 86\,478\,400{,}0 \qquad \vartheta_{24} = \quad 0{,}000\,000\,199\,3$$

Die Bedingungsgleichung für die Spitze der Kaustik wird also nach Gleichung (55):

$$\begin{aligned}
&\Delta^{24} - 75{,}69\ \Delta^{23} + 7142{,}1\ \Delta^{22} - 84\,903{,}6\ \Delta^{21} \\
&+ 15\,438\,500{,}0\ \Delta^{20} - 171\,310\,000{,}0\ \Delta^{19} + 790\,890\,000{,}0\ \Delta^{18} \\
&- 1\,972\,960\,000{,}0\ \Delta^{17} + 2\,889\,240\,000{,}0\ \Delta^{16} \\
&+ 6\,530\,500{,}0\ \Delta^{15} + 1\,193\,700\,000{,}0\ \Delta^{14} \\
&- 190\,390\,000{,}0\ \Delta^{13} - 86\,478\,400{,}0\ \Delta^{12} \\
&+ 47\,803\,000{,}0\ \Delta^{11} - 5\,933\,800{,}0\ \Delta^{10} - 1\,570\,100{,}0\ \Delta^{9} \\
&+ 469\,580{,}0\ \Delta^{8} - 19\,739{,}8\ \Delta^{7} - 6\,809{,}7\ \Delta^{6} + 765{,}84\ \Delta^{5} \\
&+ 17{,}59\ \Delta^{4} - 4{,}739\ \Delta^{3} + 0{,}141\,754\ \Delta^{2} - 0{,}000\,423\,56\ \Delta \\
&+ 0{,}000\,000\,199\,263 = 0
\end{aligned}$$

Durch Annäherung erhält man aus dieser Gleichung:

$$\Delta = 0{,}001\,387\,14$$

Es soll nun der Ort des [M. B.], der dem so berechneten Werte von $\Delta$ entspricht, bestimmt werden.

Aus Fig. 7 folgt, wenn man AO = 1 setzt:

$$\frac{l}{r} = \frac{\sin i_1}{\sin \varphi}$$

Da r = 1 angenommen war, und da $\sin \varphi = c_1$ gesetzt war, so ergibt sich zufolge Gleichung (26):

$$l = \frac{\sin i_1}{c_1} = \frac{n \cdot \sin i_1'}{c_1} = \frac{n\sqrt{\Delta}}{c_1}$$

Für die Entfernung des Mittelpunktes der natürlichen Blende von der ersten brechenden Fläche ergibt sich also:

$$x_1 = 1 - \frac{n\sqrt{\Delta}}{c_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Diese Gleichung liefert für den eben berechneten Wert von $\Delta$:

$$x_1 = 0{,}316$$

oder abgekürzt:

$$x_1 = 0{,}32,$$

während sich für achsenparallele Strahlen[8] ergeben wird $x_1 = 0{,}31$. Beim Uebergang von $\varphi = 0^0$ zu $\varphi = 5^0$ hat sich der [M. B.] also nur um den geringen Betrag von $\frac{r}{100}$ nach rechts verschoben.

## § 4. Die angenäherte Bedingungsgleichung für die Spitze der Kaustik.

Um die Lage des [M. B.] auch für andere Werte von

8. Siehe Kap. II § 8.

$\varphi$ zu bestimmen, müsste man für jeden dieser Winkel dieselben Rechnungen durchführen wie für den Fall $\varphi = 5^0$, ein äusserst kompliziertes und umständliches Verfahren. Einfacher führt folgende Ueberlegung zum Ziel:

Setzt man in Gleichung (61a) $\Delta = 0$, so erhält man:

0,000 000 199 263 ungleich 0,

d. h. Gleichung (61a) wird mit genügender Annäherung durch den Wert $\Delta = 0$ befriedigt. Der Winkel $i_1'$ selbst, der dem Fundamentalstrahl entspricht, ist also, wenn nicht streng Null, so doch äusserst klein, sodass man also seine höheren Potenzen venachlässigen kann.

Es soll nun für den Fall $\varphi = 45^0$, also für eine verhältnismässig grosse Neigung, untersucht werden, von welcher Grössenordnung der zum Fundamentalstrahl gehörige Wert $\Delta$ ist. Zu diesem Zweck ist nur das freie Glied der Gleichung (55) für den Fall $\varphi = 45^0$ zu ermitteln:

Für diesen Winkel ist:

$$c_1 = 0{,}70712$$
$$c_2 = 0{,}70712$$
$$c_3 = 0$$

Ausser den Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ brauchen von den übrigen Grössen nur berechnet zu werden: $\varepsilon_8, \varepsilon_{10}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{19}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{25}$; $\zeta_{10}, \zeta_{23}, \zeta_{25}$; $\eta_1, \eta_{25}$; $\vartheta_{24}$.

Es ergibt sich analog der vorigen Berechnung:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\alpha_1 =$ | 12,083 | $\alpha_6 =$ | 22,222 |
| $\alpha_2 =$ | — 0,28003 | $\alpha_7 =$ | 0 |
| $\alpha_3 =$ | 0 | $\alpha_8 =$ | — 22,724 |
| $\alpha_4 =$ | 0 | $\alpha_9 =$ | — 2,5173 |
| $\alpha_5 =$ | 0 | $\alpha_{10} =$ | 2,5173 |
| $\beta_1 =$ | — 49,786 | $\beta_{11} =$ | 43,736 |
| $\beta_2 =$ | 438,519 | $\beta_{12} =$ | 32,440 |
| $\beta_3 =$ | — 95,697 | $\beta_{13} =$ | 120,129 |

$\beta_4 = 0{,}6336$ $\beta_{14} = 474{,}54$
$\beta_5 = -39{,}124$ $\beta_{15} = -600{,}224$
$\beta_6 = -1108{,}667$ $\beta_{16} = 474{,}64$
$\beta_7 = 759{,}28$ $\beta_{17} = -362{,}96$
$\beta_8 = -759{,}28$ $\beta_{18} = 0$
$\beta_9 = 729{,}007$ $\beta_{19} = -2{,}7154$
$\beta_{10} = 4{,}3446$

$\gamma_1 = -0{,}1980$ $\gamma_9 = -47{,}455$
$\gamma_2 = 9{,}7754$ $\gamma_{10} = -3{,}2132$
$\gamma_3 = 0$ $\gamma_{11} = -3{,}1682$
$\gamma_4 = -1{,}809$ $\gamma_{12} = 2{,}8964$
$\gamma_5 = 5{,}1518$ $\gamma_{13} = 29{,}659$
$\gamma_6 = 47{,}455$ $\gamma_{14} = 29{,}659$
$\gamma_7 = -49{,}493$ $\gamma_{15} = -25{,}1403$
$\gamma_8 = 25{,}767$ $\gamma_{16} = -10{,}311$

$\delta_1 = -20{,}0027$ $\delta_6 = 20{,}2235$
$\delta_2 = 40{,}549$ $\delta_7 = -25{,}343$
$\delta_3 = 18{,}213$ $\delta_8 = -25{,}343$
$\delta_4 = -40{,}549$ $\delta_9 = 7{,}552$
$\delta_5 = -6{,}7883$

$\varepsilon_8 = 3298{,}82$ $\varepsilon_{19} = -2061{,}68$
$\varepsilon_{10} = 0$ $\varepsilon_{21} = 0$
$\varepsilon_{13} = -4{,}4163$ $\varepsilon_{25} = 6{,}4109$

$\zeta_{10} = -350{,}0$ $\eta_1 = 122500{,}0$
$\zeta_{23} = 0$ $\eta_{25} = 466{,}42$
$\zeta_{25} = -21{,}597$

Das freie Glied der Bedingungsgleichung (55) wird also in diesem Fall

$$\vartheta_{24} = \frac{\eta_{25}}{\eta_1} = 0{,}0038075$$

Man kommt also zu folgendem Resultat:

Nicht nur für achsenparallele Strahlen

sondern auch für Strahlen, die im Objektraum unter starker Neigung zur optischen Achse verlaufen, ist der zum Fundamentalstrahl gehörige Wert von $\Delta = \sin^2 i_1'$, wo $i_1'$ der Brechungswinkel an der ersten Linsenfläche ist, von sehr geringer Grösse.

In Gleichung (55) können also die Potenzen der Grösse $\Delta$ von der zweiten an vernachlässigt werden, sodass die angenäherte Bedingung für die Spitze der Kaustik zufolge (53) und (55) ist:

$$\Delta = -\frac{\vartheta_{24}}{\vartheta_{23}} = -\frac{\eta_{25}}{\eta_{24}}$$

Beachtet man Gleichung (62), so erhält man allgemein als Entfernung des [M. B.] von der ersten brechenden Fläche:

$$x_1 = 1 - \frac{n\sqrt{\Omega}}{c_1} \tag{63}$$

$$\text{wenn } \Omega = -\frac{\eta_{25}}{\eta_{24}} \text{ gesetzt ist.} \tag{64}$$

Es sollen nun noch folgende Grössen eingeführt werden:

$$\begin{aligned}
\varkappa_1 &= -\ 6n^5 - 14n^3 \\
\varkappa_2 &= -\ 12n^3 - 9n \\
\varkappa_3 &= \ 12n^5 + 9n^3 \\
\varkappa_4 &= -\ 3n^5 - 16n^3 \\
\varkappa_5 &= -\ 3n^5 - 3n^3 \\
\varkappa_6 &= \ 3n^3 + 10n \\
\varkappa_7 &= -\ 3n^3 \\
\varkappa_8 &= \ 6n \\
\varkappa_9 &= -\ 6n^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varkappa_{10} &= \ 17n^4 + 6n^2 \\
\varkappa_{11} &= -\ 15n^4 \\
\varkappa_{12} &= \ 15n^2 \\
\varkappa_{13} &= \ 15n^4 + 6n^2 \\
\varkappa_{14} &= -\ 12n^2 - 3 \\
\varkappa_{15} &= \ 6n^4 \\
\varkappa_{16} &= \ 3n^4 \\
\varkappa_{17} &= -\ 3n^2 - 3 \\
\varkappa_{18} &= \ 3n^4 + 3n^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= c_1 c_2^3 \\
\lambda_2 &= c_1 c_2 \\
\lambda_3 &= c_1^3 c_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_4 &= c_1^2 c_2^2 \\
\lambda_5 &= c_2^4 \\
\lambda_6 &= c_2^2
\end{aligned}$$

Dann erhält man aus (47) unter Berücksichtigung von (57), (58), (59), (60), (61) nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \lambda_1\varkappa_1 + \lambda_2\varkappa_2 + \lambda_3\varkappa_3\\
\varepsilon_{12} &= \lambda_4\varkappa_4 + \lambda_5\varkappa_5 + \lambda_6\varkappa_6\\
\varepsilon_{13} &= \lambda_1\varkappa_7 + \lambda_2\varkappa_8 + \lambda_3\varkappa_9\\
\varepsilon_{23} &= \lambda_1\varkappa_{10} + \lambda_3\varkappa_{11} + \lambda_2\varkappa_{12}\\
\varepsilon_{24} &= \lambda_4\varkappa_{13} + \lambda_6\varkappa_{14} + \lambda_5\varkappa_{15}\\
\varepsilon_{25} &= \lambda_1\varkappa_{16} + \lambda_2\varkappa_{17} + \lambda_3\varkappa_{18}
\end{aligned}$$

Ferner ergeben sich aus (49) und (51):

$$\begin{aligned}
\zeta_{12} &= \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{24}^2 + \varepsilon_{25}^2 - 2\varepsilon_{23}\varepsilon_{25} + 2\varepsilon_{11}\varepsilon_{13} + n_2\varepsilon_{25}^2\\
\zeta_{24} &= 2\varepsilon_{12}\varepsilon_{13} - 2\varepsilon_{24}\varepsilon_{25}\\
\zeta_{25} &= \varepsilon_{13}^2 - \varepsilon_{25}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{24} &= 2\zeta_{12}\zeta_{25} - \zeta_{24}^2\\
\eta_{25} &= \zeta_{25}^2
\end{aligned}$$

Es hat sich also folgendes Resultat ergeben:

Fällt ein Bündel paralleler Strahlen, die mit der optischen Achse den Winkel $\varphi$ bilden, auf eine halbkugelförmige Konvexplanlinse vom Radius r=1 und dem Brechungsexponenten n, so berechne man aus der Grösse n die Werte:

$$\begin{aligned}
\varkappa_1 &= -\,6n^5 - 14n^3 & \varkappa_{10} &= 17n^4 + 6n^2\\
\varkappa_2 &= -\,12n^3 - 9n & \varkappa_{11} &= -\,15n^4\\
\varkappa_3 &= 12n^5 + 9n^3 & \varkappa_{12} &= 15n^2\\
\varkappa_4 &= -\,3n^5 - 16n^3 & \varkappa_{13} &= 15n^4 + 6n^2\\
\varkappa_5 &= -\,3n^5 - 3n^3 & \varkappa_{14} &= -\,12n^2 - 3\\
\varkappa_6 &= 3n^3 - 10n & \varkappa_{15} &= 6n^4\\
\varkappa_7 &= -\,3n^3 & \varkappa_{16} &= 3n^4\\
\varkappa_8 &= 6n & \varkappa_{17} &= -\,3n^2 - 3\\
\varkappa_9 &= -\,6n^3 & \varkappa_{18} &= 3n^4 + 3n^2
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Winkels $\varphi$ berechne man:

$$c_1 = \sin\varphi$$
$$c_2 = \cos\varphi$$

$$\lambda_1 = c_1 c_2^3 \qquad \lambda_4 = c_1^2 c_2^2$$
$$\lambda_2 = c_1 c_2 \qquad \lambda_5 = c_2^4$$
$$\lambda_3 = c_1^3 c_2 \qquad \lambda_6 = c_2^2$$

Aus den so gewonnenen Grössen $\varkappa$ und $\lambda$ berechne man die Grössen:

$$\varepsilon_{11} = \lambda_1\varkappa_1 + \lambda_2\varkappa_2 + \lambda_3\varkappa_3 \qquad \varepsilon_{23} = \lambda_1\varkappa_{10} + \lambda_3\varkappa_{11} + \lambda_2\varkappa_{12}$$
$$\varepsilon_{12} = \lambda_4\varkappa_4 + \lambda_5\varkappa_5 + \lambda_6\varkappa_6 \qquad \varepsilon_{24} = \lambda_4\varkappa_{13} + \lambda_6\varkappa_{14} + \lambda_5\varkappa_{15}$$
$$\varepsilon_{13} = \lambda_1\varkappa_7 + \lambda_2\varkappa_8 + \lambda_3\varkappa_9 \qquad \varepsilon_{25} = \lambda_1\varkappa_{16} + \lambda_2\varkappa_{17} + \lambda_3\varkappa_{18}$$

$$\zeta_{12} = \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{24}^2 + \varepsilon_{25}^2 - 2\varepsilon_{23}\varepsilon_{25} + 2\varepsilon_{11}\varepsilon_{13} + n^2\varepsilon_{25}^2$$
$$\zeta_{24} = 2\varepsilon_{12}\varepsilon_{13} - 2\varepsilon_{24}\varepsilon_{25}$$
$$\zeta_{25} = \varepsilon_{13}^2 - \varepsilon_{25}^2$$

$$\eta_{24} = 2\zeta_{12}\,\zeta_{25} - \zeta_{24}^2$$
$$\eta_{25} = \zeta_{25}^2$$

$$\Omega = -\frac{\eta_{25}}{\eta_{24}}$$

Die Entfernung $x_1$ des [M. B.] von der ersten Linsenfläche berechnet sich dann aus der Gleichung

$$x_1 = 1 - \frac{n\sqrt{\Omega}}{c_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

## § 5. Ort der natürlichen Blende für verschiedene Strahlenneigungen.

Es soll nun nach diesem Verfahren für einige Strahlenneigungen der [M. B.] seiner Lage nach bestimmt werden.

Für $n = 1{,}6$ ergeben sich die Grössen[9]:

9. Das Minuszeichen hinter dem Logarithmus deutet auf einen negativen Numerus.

| | |
|---|---|
| $\log \varkappa_1 = 2{,}08012.2 -$ | $\log \varkappa_{10} = 2{,}10301.8$ |
| $\log \varkappa_2 = 1{,}80313.2 -$ | $\log \varkappa_{11} = 1{,}99257 -$ |
| $\log \varkappa_3 = 2{,}21136.3$ | $\log \varkappa_{12} = 1{,}58433$ |
| $\log \varkappa_4 = 1{,}98674.2 -$ | $\log \varkappa_{13} = 2{,}05560.8$ |
| $\log \varkappa_5 = 1{,}64093 -$ | $\log \varkappa_{14} = 1{,}52789 -$ |
| $\log \varkappa_6 = 1{,}45160$ | $\log \varkappa_{15} = 1{,}59463$ |
| $\log \varkappa_7 = 1{,}08948 -$ | $\log \varkappa_{16} = 1{,}29360$ |
| $\log \varkappa_8 = 0{,}98227$ | $\log \varkappa_{17} = 1{,}02857 -$ |
| $\log \varkappa_9 = 1{,}39051.2 -$ | $\log \varkappa_{18} = 1{,}43681.6$ |

Ist $\varphi$ sehr klein, sodass man setzen kann $\varphi = 0^0$, so wird der Ausdruck $\frac{n\sqrt{\Omega}}{c_1}$ unbestimmt, Gleichung (65) kann also für diesen Fall nicht zur Bestimung von $x_1$ benutzt werden. Es sei vorgreifend[8] bemerkt, das für $\varphi = 0^0$ sich ergibt $x_1 = 0{,}31$.

I. $\varphi = 5^0$

| | |
|---|---|
| $\log c_1 = 0{,}94030 - 2$ | $\log c_2 = 0{,}99834 - 1$ |
| $\log \lambda_1 = 0{,}93532 - 2$ | $\log \lambda_4 = 0{,}87728 - 3$ |
| $\log \lambda_2 = 0{,}93964 - 2$ | $\log \lambda_5 = 0{,}99336 - 1$ |
| $\log \lambda_3 = 0{,}81924 - 4$ | $\log \lambda_6 = 0{,}99668 - 1$ |
| $\log \varepsilon_{11} = 1{,}19791.4 -$ | $\log \varepsilon_{23} = 1{,}15204.2$ |
| $\log \varepsilon_{12} = 1{,}19700 -$ | $\log \varepsilon_{24} = 0{,}78666.6$ |
| $\log \varepsilon_{13} = 0{,}38286.6 - 1 -$ | $\log \varepsilon_{25} = 0{,}89476 - 1$ |
| $\log \zeta_{12} = 2{,}29623$ | $\log \eta_{24} = 2{,}35141 -$ |
| $\log \zeta_{24} = 0{,}30161.4 -$ | $\log \eta_{25} = 0{,}49264 - 1$ |
| $\log \zeta_{25} = 0{,}74632 - 1 -$ | |
| $\log \Omega = 0{,}14123 - 3$ | |

$$x_1 = 0{,}32$$

II. $\varphi = 15^0$

| | |
|---|---|
| $\log c_1 = 0{,}41300 - 1$ | $\log c_2 = 0{,}98494 - 1$ |

$\log \lambda_1 = 0{,}36782 - 1$ $\log \lambda_4 = 0{,}79588 - 2$
$\log \lambda_2 = 0{,}39794 - 1$ $\log \lambda_5 = 0{,}93976 - 1$
$\log \lambda_3 = 0{,}22394 - 2$ $\log \lambda_6 = 0{,}96988 - 1$

$\log \varepsilon_{11} = 1{,}61504.4 -$ $\log \varepsilon_{23} = 1{,}57429.6$
$\log \varepsilon_{12} = 1{,}24917.5 -$ $\log \varepsilon_{24} = 0{,}99441$
$\log \varepsilon_{13} = 0{,}94335.5 - 1 -$ $\log \varepsilon_{25} = 0{,}37544.4$

$\log \zeta_{12} = 2{,}12004.8$ $\log \eta_{24} = 3{,}18455 -$
$\log \zeta_{24} = 1{,}19623.4 -$ $\log \eta_{25} = 1{,}37407$
$\log \zeta_{25} = 0{,}68703.5 -$

$\log \Omega = 0{,}18952.0 - 2$
$x_1 = 0{,}33$

III. $\varphi = 30^0$
$\log c_1 = 0{,}69897 - 1$ $\log c_2 = 0{,}93753 - 1$

$\log \lambda_1 = 0{,}51156 - 1$ $\log \lambda_4 = 0{,}27300 - 1$
$\log \lambda_2 = 0{,}63650 - 1$ $\log \lambda_5 = 0{,}75012 - 1$
$\log \lambda_3 = 0{,}03444 - 1$ $\log \lambda_6 = 0{,}87506 - 1$

$\log \varepsilon_{11} = 1{,}68986.7 -$ $\log \varepsilon_{23} = 1{,}67353.4$
$\log \varepsilon_{12} = 1{,}33399 -$ $\log \varepsilon_{24} = 1{,}25861.6$
$\log \varepsilon_{13} = 0{,}39693.4 -$ $\log \varepsilon_{25} = 0{,}67395.8$

$\log \zeta_{12} = 1{,}17449.5$ $\log \eta_{24} = 3{,}65562 -$
$\log \zeta_{24} = 1{,}80349.5 -$ $\log \eta_{25} = 2{,}41144.6$
$\log \zeta_{25} = 1{,}20572.3 -$

$\log \Omega = 0{,}75582.6 - 2$
$x_1 = 0{,}24$

IV. $\varphi = 45^0$
$\log c_1 = 0{,}84949 - 1$ $\log c_2 = 0{,}84949 - 1$

$\log \lambda_1 = 0{,}39796 - 1$ $\log \lambda_4 = 0{,}39796 - 1$
$\log \lambda_2 = 0{,}69898 - 1$ $\log \lambda_5 = 0{,}39796 - 1$
$\log \lambda_3 = 0{,}39796 - 1$ $\log \lambda_6 = 0{,}69898 - 1$

$\log \varepsilon_{11} = 1{,}32570 -$ $\log \varepsilon_{24} = 1{,}33015$
$\log \varepsilon_{12} = 1{,}32309 -$ $\log \varepsilon_{25} = 0{,}80692.3$
$\log \varepsilon_{13} = 0{,}64506 -$
$\log \varepsilon_{23} = 1{,}41359.8$

$\log \zeta_{12} = 1{,}13529 -$ $\log \eta_{24} = 3{,}86577.5 -$
$\log \zeta_{24} = 1{,}94626 -$ $\log \eta_{25} = 2{,}66876.6$
$\log \zeta_{25} = 1{,}33438.3 -$

$\log \Omega = 0{,}80299.1 - 2$
$x_1 = 0{,}43$

Es hat sich also folgendes Resultat ergeben:

| Neigung der einfallenden Strahlen zur opt. Achse | Entfernung des [M. B.] von der ersten Linsenfläche |
|---|---|
| $0^0$ | 0,31 |
| $5^0$ | 0,32 |
| $15^0$ | 0,33 |
| $30^0$ | 0,24 |
| $45^0$ | 0,43 |

Für eine Winkelneigung der einfallenden Strahlen zur optischen Achse von $\varphi = 5^0$ beträgt also die Verschiebung des [M. B.] nur 1 % gegenüber der Lage des [M. B.] für achsenparallele Strahlen, bei einer Winkelneigung von $\varphi = 15^0$ beträgt die Verschiebung 2 %.

Es ergiebt sich also das wichtige Resultat:

Geht man von solchen Strahlen, die mit der optischen Achse einen sehr kleinen Winkel bilden, zu Strahlen endlicher Neigung

über, so bleibt die Verschiebung des [M. B.] innerhalb sehr geringer Grenzen.

Diese Tatsache berechtigt dazu, für den wandernden Punkt einen festen anzunehmen und zwar denjenigen, der sich unter Voraussetzung achsenparalleler Strahlen ergibt.

Es war schon oben erwähnt, dass der Versuch, den Ort des [M. B.] bei einem beliebigen brechenden System unter Voraussetzung endlicher Strahlenneigungen zu bestimmen, auf unüberwindliche mathematische Schwierigkeiten stösst.

Das eben erhaltene Resultat berechtigt jedoch zu der Annahme, dass auch bei andern brechenden Systemen die Verschiebung des [M. B.] für verschiedene Strahlenneigungen eine geringe ist. Insbesondere wird dies bei unendlich dünnen Linsen der Fall sein. Es soll nun im folgenden Kapitel der Ort des [M. B.] für ein beliebiges brechendes System bestimmt werden.

## Kapitel II.

Die natürliche Blende bei einem beliebigen brechenden System.

### § 1. Formeln zur Durchrechnung eines Strahles im Parachsialgebiet.

Eine Kugelfläche AB (Fig. 8) vom Radius r möge zwei Medien von dem Brechungsexponenten n und n′ voneinander trennen. Im Objektraum befinde sich ein leuchtender Punkt P. Ist dann M der Krümmungsmittel-

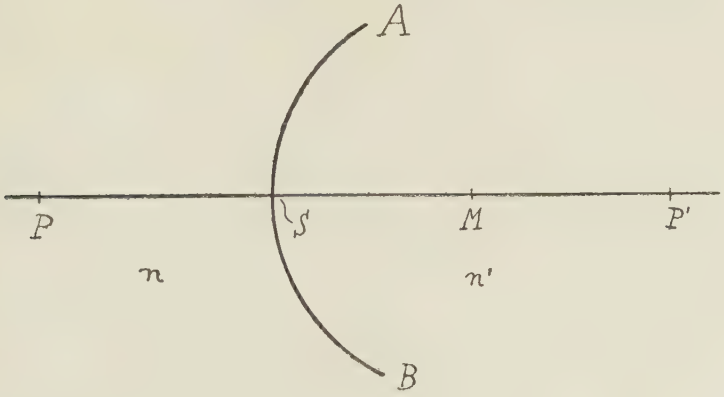


Fig. 8

punkt der Kugel, so ist PM die optische Achse; sie möge die Kugelfläche in S schneiden. Gehen nun von P Strahlen aus unter kleiner Neigung zur optischen Achse, so entsteht in P′ ein Bild von P. Setzt man

$$PS = a \text{ und } SP' = a',$$

so gilt für das parachsiale Gebiet bekanntlich die Beziehung:

$$\frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{n' - n}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

Diese Formel lässt sich auf den Fall beliebig vieler brechender Flächen verallgemeinern. Der Einfachheit halber soll Gleichung (66) nur auf den Fall dreier brechender Flächen verallgemeinert werden.

Es sei der Brechungsexponent:

vor der ersten brech. Fläche $n_1$,
„ „ zweiten „ „ $n_2$,
„ „ dritten „ „ $n_3$,
hinter der ersten br. Fläche $n_1'$,
„ „ zweiten „ „ $n_2'$,
„ „ dritten „ „ $n_3'$.

Der Brechungsexponent eines und desselben Mediums ist also doppelt bezeichnet, und es ist:

$$n_1' = n_2$$
$$n_2' = n_3$$
$$n_3' = n_4$$

Ein Gegenstand y, im ersten Medium erzeugt nacheinander die Bilder $y_2$, $y_3$, $y_4$. Die Entfernungen der einzelnen

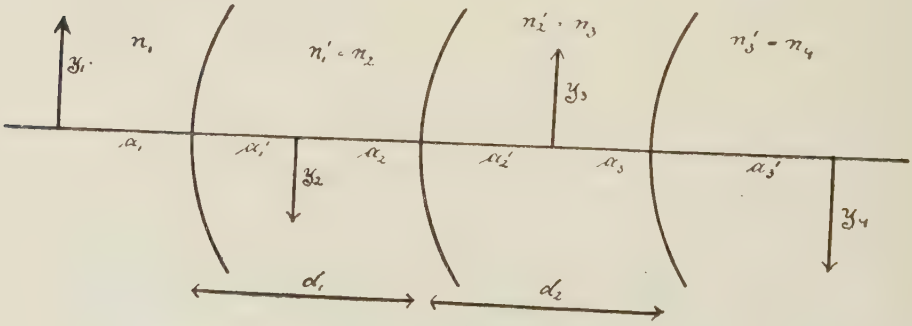


Fig. 9

brechenden Flächen von einander sind $d_1$, $d_2$. Die Radien der brechenden Flächen bezeichnen wir mit $r_1$, $r_2$, $r_3$. (Fig. 9.)

Aus Gleichung (66) ergibt sich dann

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{n_1}{a_1} + \dfrac{n_1'}{a_1'} = \dfrac{n_1' - n_1}{r_1} \\ a_1' + a_2 = d_1 \\ \dfrac{n_2}{a_2} + \dfrac{n_2'}{a_2'} = \dfrac{n_2' - n_2}{r_2} \\ a_2' + a_3 = d_2 \\ \dfrac{n_3}{a_3} + \dfrac{n_3'}{a_3'} = \dfrac{n_3' - n_3}{r_3} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (67)$$

Es ist noch zu bemerken, dass in (67) die Radien der brechenden Flächen mit positivem oder negativem Vorzeichen zu nehmen sind, je nachdem die brechende Fläche ihre konvexe oder konkave Seite dem einfallenden Lichte zuwendet. In (67) sind von den Scheiteln der brechenden Flächen aus die Schnittweiten im Objektraum nach links, im Bildraum nach rechts positiv genommen. Zum Zweck der späteren Anwendung zur numerischen Berechnung sollen nun die Schnittweiten vor und nach der Brechung im Sinne der Lichtrichtung positiv, im entgegengesetzten Sinne negativ gerechnet werden.

In dieser Weise ausgedrükt werden die Schnittweiten in (67), wenn man die Zeichen a zur Vermeidung von Irrtümern durch die Zeichen c ersetzt:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = -c_1 \\ a_1' = c_1' \\ a_2 = -c_2 \\ a_2' = c_2' \\ a_3 = -c_3 \\ a_3' = c_3' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (68)$$

Wendet man (67) mit Berücksichtigung von (68) auf eine Brechung an der $(\varkappa-1)^{\text{ten}}$ und $\varkappa^{\text{ten}}$ Fläche eines Systems von beliebig vielen brechenden Flächen an, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{n'_{\varkappa-1}}{c'_{\varkappa-1}} - \frac{n_{\varkappa-1}}{c_{\varkappa-1}} &= \frac{n'_{\varkappa-1} - n_{\varkappa-1}}{r_{\varkappa-1}} \\ c_{\varkappa} &= c'_{\varkappa-1} - d_{\varkappa-1} \\ \frac{n'_{\varkappa}}{c'_{\varkappa}} - \frac{n_{\varkappa}}{c_{\varkappa}} &= \frac{n'_{\varkappa} - n_{\varkappa}}{r_{\varkappa}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (69)$$

Sind von einem System aus $\varkappa$ brechenden Kugelflächen die Radien, Dicken und Brechungsexponenten gegeben, und kennt man ausserdem die Grösse $c_1$, d. h. die Entfernung des Objektes von der ersten brechenden Fläche, so kann man nach (69) die letzte Schnittweite $c'_{\varkappa}$ berechnen.

## § 2. Formeln zur Durchrechnung eines Meridionalstrahles.

Das Gleichungssystem (69) gilt wie erwähnt nur für Strahlen, die in unmittelbarer Nähe der optischen Achse verlaufen. Es soll nun ein Gleichungssystem für Meridionalstrahlen aufgestellt werden.

Es sei in Fig. 10 eine brechende Kugelfläche mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M dargestellt. Soll die objektseitige Schnittweite positiv gerechnet werden, und fällt das Licht von links auf die Fläche, so muss der Objektpunkt A rechts von der Kugelfläche angenommen werden. Ein nach A hingehendes unendlich dünnes Strahlenbündel möge die Kugelfläche in den Punkten P und Q schneiden. Es sei das Bogenelement $PQ = ds$. Man ziehe PM und QM und setze $\sphericalangle QMP = d\varphi$. Ferner sei die Schnittweite $QA = t$.

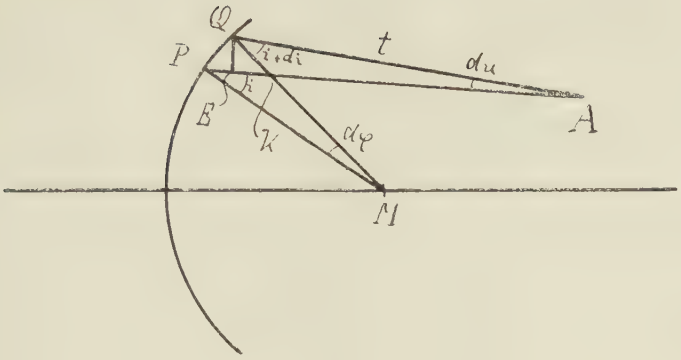


Fig. 10

Von Q fälle man auf PA das Lot QE. Der Winkel, den die beiden Strahlen AQ und AP mit einander bilden, sei du. Der Einfallswinkel des Strahles AP sei i, der des Strahles AQ sei $i + di$. Ferner ist $\sphericalangle PQE = i$. Bezeichnet man den Schnittpunkt von QM und PA mit K, so ist:

$$\sphericalangle AKM = i + d\varphi$$
$$\sphericalangle PKQ = i + d\varphi + du$$

als Aussenwinkel, und da

$$\sphericalangle AKM = \sphericalangle PKQ$$

als Scheitelwinkel, so ergibt sich:

$$d\varphi = di + du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

In dem Dreieck PQE ist:

$$QE = ds \,.\, \cos i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

und im Dreieck AQE:

$$QE = t \,.\, du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

Ferner ist:

$$ds = QP = r \,.\, d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

Dividiert man (70) durch $d\varphi$, so ergibt sich:

$$1 = \frac{di}{d\varphi} + \frac{du}{d\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

Aus den Gleichungen (71) und (72) folgt:

$$ds \,.\, \cos i = t \,.\, du \quad (75)$$

Aus den Gleichungen (75) und (73) folgt:

$$r \,.\, d\varphi \,.\, \cos i = t \,.\, du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

oder

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{r \,.\, \cos i}{t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

Aus den Gleichungen (74) und (77) folgt:

$$\frac{r \,.\, \cos i}{t} = 1 - \frac{di}{d\varphi} \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

Daraus folgt:

$$\frac{di}{r \,.\, d\varphi} = \frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t} \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $n \,.\, \cos i$, so folgt:

$$\frac{n \,.\, \cos i \, di}{r \,.\, d\varphi} = n \,.\, \cos i \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

oder

$$n \cos i \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right) = \frac{d(n \,.\, \sin i)}{r \,.\, d\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

Punkt A (Fig. 10) sei der leuchtende Punkt, nach dem die Strahlen hingehen. Sie werden in P und Q gebrochen.

Nach der Brechung muss man setzen:

$n'$ für $n$
$i'$ „ $i$
$t'$ „ $t$,

dagegen bleiben r und $\varphi$ unverändert. Für das gebrochene Bündel erhält man also analog zu Gleichung (81):

$$n' \cos i' \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i'}{t'}\right) = \frac{d(n' \sin i')}{r \cdot d\varphi}.$$

Unter Berücksichtigung des Brechungsgesetzes von Snellius folgt hieraus:

$$n' \cos i' \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i'}{t'}\right) = \frac{d(n \sin i)}{r \cdot d\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

Aus den Gleichungen (81) und (82) folgt:

$$n \cos i \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right) = n' \cos i' \left(\frac{1}{r'} - \frac{\cos i'}{t'}\right) \quad . \quad . \quad (83)$$

Aus dieser Formel kann die Schnittweite t' nach der Brechung berechnet werden, wenn die Entfernung t des leuchtenden Punktes sowie der Einfalls- und Brechungswinkel bekannt sind.

Bemerkt sei noch, dass für ein Meridionalbündel von beliebiger Neigung der Helmholtz-Lagrangesche[1] [9] [10] Satz gilt.

## § 3. Die Koma und die Bedingung der Komafreiheit.

Geht ein Strahl von einem Medium mit dem Brechungsexponenten n zu einem andern mit dem Brechungsexponenten n' über und ist der Einfalls- bezw. Brechungswinkel i und i', dann ist bekanntlich

$$Q = n \cdot \sin i = n' \sin i' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

---

9. A. Gleichen, Lehrbuch der geometrischen Optik.
10. Winkelmann, Handbuch der Physik. 6 Bd. Optik.

eine optische Invariante. Differentiiert man diese Gleichung nach $\varphi$, so erhält man

$$\frac{dQ}{d\varphi} = n \cos i \frac{di}{d\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

Mit Rücksicht auf Gleichung (79) ergibt sich hieraus:

$$\frac{1}{r} \frac{dQ}{d\varphi} = n \cos i \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

Diese Grösse ist wieder eine optische Invariante; man setze

$$Q^I = n \cos i \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

durch Differentiation entsteht hieraus:

$$\frac{dQ^I}{d\varphi} = -\left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right) n \,.\, \sin i \,.\, \frac{di}{d\varphi} - n \cos i \frac{\partial \frac{\cos i}{t}}{\partial i} \cdot \frac{di}{d\varphi}$$

$$- n \cos i \frac{\partial \frac{\cos i}{t}}{\partial t} \cdot \frac{dt}{d\varphi}.$$

Zufolge der Gleichung (79) entsteht hieraus

$$\frac{dQ^I}{d\varphi} = - r \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right)^2 n \,.\, \sin i + n \cos i \,.\, \frac{\sin i}{t} \cdot \frac{di}{d\varphi}$$

$$+ \frac{n \cos^2 i}{t^2} \cdot \frac{dt}{d\varphi}$$

und weiter:

$$\frac{dQ^I}{d\varphi} = - r \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right)^2 . n \,.\, \sin i$$

$$+ n \,.\, \cos i \,.\, r \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right) \cdot \frac{\sin i}{t} + \frac{n \cos^2 i}{t^2} \cdot \frac{dt}{d\varphi}$$

Führt man jetzt die Grössen Q und $Q^I$ ein und berücksichtigt Gleichung (76), so erhält man:

$$\frac{dQ^I}{d\varphi} = -\,r\,Q\left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right)^2 + r\,QQ^I \cdot \frac{1}{nt} + r \cdot \frac{n\cos^3 i}{t^3} \cdot \frac{dt}{du} \quad (88)$$

Geht ein Meridionalbündel von der Schnittweite t in ein anderes benachbartes über, so setzen wir die Schnittweite des neuen nach Massgabe der Differentialrechnung $t + dt$. Diese Zunahme dt von t soll jetzt berechnet werden.

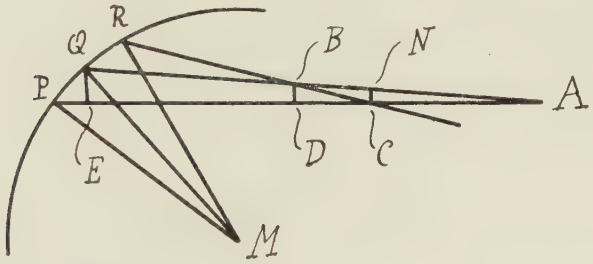


Fig. 11

In Fig. 11 sei PAQ ein unendlich dünnes einfallendes Meridionalbündel. Ausser diesem Bündel sei noch das ihm benachbarte Bündel QBR dargestellt, dessen Randstrahl RB den Strahl PA in C schneidet. Man fälle noch von B und Q die Lote BD und QE auf AP und errichte in C auf RB das Lot CN.

Bei dem Grade der hier vorausgesetzten Genauigkeit kann man nun die Dreiecke BCA und BCD als gleichschenklich annehmen, sodass man hat:

$$BC = CA \text{ und } BC = CD.$$

Man setze:

$$AC = BC = CD = d\tau$$
$$CU = dl$$
$$PQ = RQ = ds$$
$$\sphericalangle PAQ = du$$
$$\sphericalangle PMQ = d\varphi$$
$$\sphericalangle EQP = i$$

Bekanntlich schneiden sich die drei benachbarten Meridionalstrahlen nicht in einem Punkte sondern bilden das Stück einer kaustischen Linie, das man mit dem Namen „Koma" bezeichnet. Als Veranlassung dieser Komabildung kann man das kleine Dreieck ABC ansehen. Gehen wir aus von dem Bündel $PA = t$, so müssen wir, wie schon oben erwähnt, dem benachbaten Bündel QB die Schnittweite $t + dt$ geben. Projizieren wir QB auf PA, so ist:

$$t + dt = QB = ED : \cos du$$

Da der Winkel du sehr klein ist, sein Kosinus also der Eins sehr nahe kommt, so können wir statt QB auch ED setzen. Nun ist, wie sich aus der Figur 11 ergibt:

$$PA = PE + ED + DC + CA$$

oder:

$$t = PE + (t + dt) + d\tau + d\tau.$$

In dem Dreieck PQE ist:

$$PE = ds \cdot \sin i$$

und im Dreieck QPM

$$ds = r \cdot d\varphi$$

also wird

$$PE = r \cdot d\varphi \cdot \sin i$$

und die obige Gleichung für t wird:

$$t = r \,.\, d\varphi \,.\, \sin i + t + dt + 2d\tau.$$

Hieraus folgt, wenn man noch durch du dividiert:

$$\frac{dt}{du} = -2\frac{d\tau}{du} - r \,.\, \sin i \frac{d\varphi}{du}.$$

Mit Rücksicht auf Gleichung (76) folgt:

$$\frac{dt}{du} = -2\frac{d\tau}{du} - \frac{t \sin i}{\cos i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

Aus Gleichung (88) folgt dann wenn man diesen Wert für $\frac{dt}{du}$ einführt und noch durch r dividiert:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r} \cdot \frac{dQ^I}{d\varphi} &= -Q\left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right)^2 + QQ^I \cdot \frac{1}{nt} \\ &+ \frac{n \cos^3 i}{t^3}\left(-2\frac{d\tau}{du} - \frac{t \sin i}{\cos i}\right) = -\frac{Q}{r^2} + \frac{2\,Q \cos i}{rt} \\ -\frac{Q \cos^2 i}{t^2} + \frac{QQ^I}{nt} - \frac{2n \cos^3 i}{t^3} \cdot \frac{d\tau}{du} - \frac{n \sin i \cos^2 i}{t^2} &= -\frac{Q}{r^2} + \frac{2\,Qn \cos i}{nt}\left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right) \\ &+ \frac{QQ^I}{nt} - \frac{2n \cos^2 i}{t^3}\frac{d\tau}{du} \end{aligned}\right\} \quad (90)$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (87):

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{dQ^I}{d\varphi} = -\frac{Q}{r^2} + \frac{3\,QQ^I}{nt} - \frac{2n \cos^3 i}{t^3} \cdot \frac{d\tau}{du} \quad . \quad (91)$$

Wären wir von der Gleichung

$$Q = n' \sin i'$$

ausgegangen, so wären wir zu einer ganz analogen wie (91) gekommen, in der an Stelle der Grössen n, t, $d\tau$, du, i die Grössen n', t', $d\tau'$ du', i' auftreten würden, während die Grössen r und $d\varphi$ unverändert geblieben wären. Diese neue Gleichung würde sich dann also auf das gebrochene Bündel beziehen. Der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (91) ist also eine optische Invariante. Man hat also auch:

$$\frac{1}{r}\frac{dQ^I}{d\varphi} = -\frac{Q}{r^2} + \frac{3\,QQ^I}{n't'} - \frac{2n'\cos^3 i'}{t'^3} \cdot \frac{du'}{d\tau'} \quad . \quad (92)$$

Wenden wir jetzt auf die Gleichungen (91) und (92) die Abbesche Schreibweise an, so ergibt sich, nachdem wir die rechten Seiten gleichgesetzt haben:

$$\Delta\left(\frac{n\cos^3 i}{t^3} \cdot \frac{d\tau}{du}\right) = {}^3/_2\, QQ^I \Delta\left(\frac{1}{nt}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

Nun ist weiter nach Fig. 11:

$$dl = d\tau \,.\, du$$

oder

$$\frac{d\tau}{du} = \frac{dl}{du^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass dl unendlich klein vom zweiten Grade ist, da $d\tau$ und du unendlich klein vom ersten Grade sind.

Nach den Gleichungen (76) und (73) ist:

$$\frac{\cos i}{t} = \frac{du}{r \,.\, d\varphi} = \frac{du}{ds} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$\frac{n \cdot \cos^3 i}{t^3} \cdot \frac{d\tau}{du} = n \left(\frac{du}{ds}\right)^3 \frac{dl}{du^2} = \frac{1}{ds^3} \cdot n\, du \cdot dl \quad . \quad (96)$$

demnach wird Gleichung (93):

$$\Delta \left(\frac{n\, du\, dl}{ds^3}\right) = {}^3/_2\, QQ^I\, \Delta \left(\frac{1}{nt}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

oder, da ds vor und nach der Brechung dasselbe ist:

$$\frac{1}{ds^3} \Delta (n\, du\, dl) = {}^3/_2\, QQ^I\, \Delta \left(\frac{1}{nt}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

Es war schon oben erwähnt, dass man als Mass der Koma das unendlich kleine Dreieck ansehen kann, das von den drei benachbarten Strahlen gebildet wird. Die Koma verschwindet also, wenn der Inhalt des Dreiecks Null wird. Für eine einzige brechende Fläche würde also die Bedingung der Komafreiheit sein:

$$dl = 0.$$

Es soll nun auch die Bedingung der Komafreiheit für ein System von beliebig vielen brechenden Flächen ermittelt werden.

Die Gleichung (93) gelte für die Brechung an einer, z. B. der $\varkappa^{ten}$ Fläche des Systems, dann müssen alle Grössen den Index $\varkappa$ erhalten:

$$\frac{1}{ds^3_\varkappa} \Delta \left(n\, du\, dl\right)_\varkappa = {}^3/_2\, Q_\varkappa Q^I_\varkappa\, \Delta \left(\frac{1}{nt}\right)_\varkappa \quad . \quad . \quad (99)$$

Nach unsern Definitionen ist:

$$\Delta (n\, du\, dl)_\varkappa = n'_\varkappa\, du'_\varkappa\, dl'_\varkappa - n_\varkappa\, du_\varkappa\, dl_\varkappa$$

oder da für jeden Wert von $\varkappa$

$$n'_\varkappa = n_{\varkappa+1}$$

ist, so wird:

$$\Delta (n\, du\, dl)_\varkappa = n_{\varkappa+1}\ du'_\varkappa \,.\, dl'_\varkappa - n_\varkappa\, du_\varkappa\, dl_\varkappa \qquad (100)$$

Wir fassen nun $dl'_\varkappa$ für einen Augenblick als unendlich kleines Objekt auf. Es liegt allerdings nicht streng im Bildpunkt des in Frage kommenden unendlich dünnen Meridionalbündels, aber es liegt ihm doch unendlich nahe. Da der Helmholtz-Lagrangesche Satz auch für beliebig geneigte meridionale Bündel gilt (siehe oben), so ist:

$$n_{\varkappa+1}\ du'_\varkappa \,.\, dl'_\varkappa = n_1\, du_1\, dl_1 \qquad (101)$$

wo $n_1$ und $u_1$ Brechungsexponnent und halbe Oeffnung des Bündels im ersten Medium sind.

Wendet man dieselben Betrachtungen auf die Grösse $dl_\varkappa$ an, so wird:

$$n_\varkappa\, du_\varkappa\, dl_\varkappa = n_1\, du_1\, d\lambda_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

Hierin haben $n_1$ und $du_1$ dieselbe Bedeutung wie oben; $d\lambda_1$ ist diejenige Objektgrösse, welcher vor der Brechung gerade die Bildgrösse $dl_\varkappa$ entspricht.

Setzt man die Grössen (101) und (102) in (100) ein, so erhält man:

$$\Delta (n\, du\, dl)_\varkappa = n_1\, du_1\, dl_1 - n_1\, du_1\, d\lambda_1\,,$$

oder wenn man noch setzt:

$$dl_1 - d\lambda_1 = \delta(l):$$

$$\Delta (n\, du\, dl)_\varkappa = n_1\, du_1\, \delta(l) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

Die Gleichung (99) geht dann über in:

$$\frac{1}{ds^3_\varkappa}\, n_1\, du_1\, \delta(l) = {}^3/_2\, Q_\varkappa Q_\varkappa{}^I\, \Delta \left(\frac{1}{nt}\right)_\varkappa \quad . \quad . \quad (104)$$

woraus sich ergibt:

$$\delta(l) = {}^3/_2\, \frac{ds_\varkappa{}^3}{n_1\, du_1}\, Q_\varkappa Q_\varkappa{}^I\, \Delta \left(\frac{1}{nt}\right)_\varkappa .$$

Erweitert man die rechte Seite dieser Gleichung mit $(n_1\ du_1)^2$, so erhält man:

$$\delta(l) = {}^3/_2\, (n_1\, du_1)^2 \left(\frac{ds_\varkappa}{n_1\, du_1}\right)^3 Q_\varkappa Q_\varkappa{}^I\, \Delta \left(\frac{1}{nt}\right)_\varkappa \quad (105)$$

Nach Gleichung (75) ist:

$$du_1 = \frac{ds_1 \cos i_1}{t_1}$$

Folglich wird Gleichung (105):

$$\delta(l) = {}^3/_2\, (n_1\, du_1)^2 \left(\frac{t_1}{n_1 \cos i_1}\right)^3 \left(\frac{ds_\varkappa}{ds_1}\right)^3 Q_\varkappa Q_\varkappa{}^I\, \Delta \left(\frac{1}{nt}\right)_\varkappa \quad (106)$$

In Fig. 12 sind zwei beliebige brechende Flächen eines Systems z. B. die $(\varkappa-1)^{te}$ und die $\varkappa^{te}$ dargestellt.

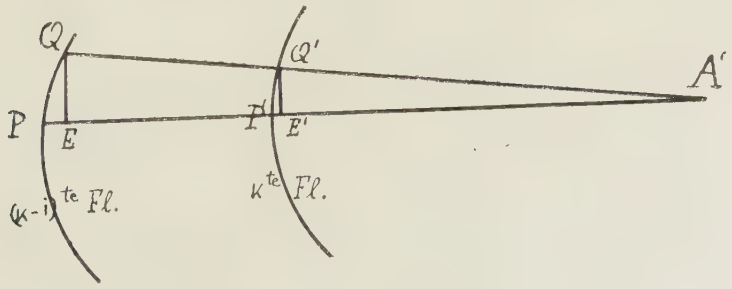


Fig. 12

Das an der $(\varkappa-1)^{\text{ten}}$ Fläche gebrochene Bündel sei PQA′ mit dem Bildpunkte A′. Dieses Bündel möge die zweite Fläche in P′Q′ treffen. Die von Q und Q′ auf den Strahl PA′ gefällten Lote seien QE und Q′E′. Wendet man die bisher gebrauchten Bezeichnungen jetzt an, so wird:

$$\sphericalangle \, PQE = i'_{\varkappa-1}$$

$$\sphericalangle \, P'Q'E' = i_{\varkappa}.$$

Ferner folgt aus der Figur:

$$QE = ds_{\varkappa-1} \cdot \cos i'_{\varkappa-1}$$

$$Q'E' = ds_{\varkappa} \cdot \cos i_{\varkappa}$$

$$\frac{Q'E'}{QE} = \frac{t_{\varkappa}}{t'_{\varkappa-1}} = \frac{ds_{\varkappa} \cos i_{\varkappa}}{ds_{\varkappa-1} \cdot \cos i'_{\varkappa-1}}$$

oder

$$\frac{ds_{\varkappa}}{ds_{\varkappa-1}} = \frac{t_{\varkappa}}{t'_{\varkappa-1}} \cdot \frac{\cos i'_{\varkappa-1}}{\cos i_{\varkappa}} \quad \cdot \cdot \quad (107)$$

denn $QA' = PA'$ sind ja unendlich nahe Strahlen, also kann

$$PA' = QA' = t'_{\varkappa-1}$$

und

$$P'A' = Q'A' = t_{\varkappa}$$

gesetzt werden.

Die Gleichnng (107) gilt stets für zwei aufeinander folgende Brechungen. Durch sukzessive Anwendung dieser Gleichung findet man:

$$\frac{ds_\varkappa}{ds_1} = \frac{t_\varkappa}{t'_{\varkappa-1}} \cdot \frac{t_{\varkappa-1}}{t'_{\varkappa-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{t_2}{t_1} \cdot \frac{\cos i'_{\varkappa-1}}{\cos i_\varkappa} \cdot \frac{\cos i'_{\varkappa-2}}{\cos i_{\varkappa-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cos i_1'}{\cos i_2} \quad (108)$$

Sind also in dem Bündel die Schnittweiten t und die Winkel i und i′ etwa durch trigonometrische Rechnung bestimmt, so dient die Gleichung (108) zur Bestimmung von $\frac{ds_\varkappa}{ds_1}$, wodurch dann der Ausdruck unter (106) berechenbar ist.

Die Grösse $\delta(l)$ in Gleichung (106) stellt die Verschlechterung dar, die an dem Bilde unter dem Einflusse der Komawirkung durch die $\varkappa^{te}$ Fläche hervorgebracht wird. Man kann nach dieser Formel die Verschlechterung für jede einzelne brechende Fläche sofort hinschreiben, indem man in Gleichung (106) für $\varkappa$ alle ganzen Zahlen von 1 bis $\lambda$ setzt.

Damit die Summe dieser Verschlechterungen verschwindet, in dem betrachteten Bündel also die Koma aufgehoben ist, hat man also für Objekte in endlicher wie auch in unendlicher Entfernung nach Unterdrückung konstanter Faktoren die Bedingung:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\lambda} \left(\frac{ds_\varkappa}{ds_1}\right)^3 Q_\varkappa Q_\varkappa{}^I \Delta\left(\frac{1}{nt}\right)_\varkappa = 0, \quad \ldots \quad (109)$$

eine Gleichung, die schon Herr Gleichen[1] entwickelt hat.

Hat man also im Objektraum einen beliebigen leuchtenden Punkt, von dem im Hauptschnitt unendlich viele meridionale Strahlenbündel ausgehen, die ein beliebiges zentriertes System von $\lambda$ brechendenden Flächen durchdringen, so gilt Gleichung (109) für denjenigen Strahl, der nach der Brechung durch einen komafreien Punkt geht,

d. h. durch einen Punkt, in dem sich drei benachbarte Strahlen streng vereinigen. Wie schon oben erwähnt, ist dieser Punkt identisch mit der Spitze der Kaustik, die von der Gesamtheit der gebrochenen Strahlen gebildet wird. Mit anderen Worten: Gleichung 109 gilt für den Fundamentalstrahl.

Entwickelt man die auftretenden Sinusse und Kosinusse in Reihen, vernachlässigt alle höheren Potenzen als die zweiten, und fordert man, dass die so umgeformte Gleichung für alle Strahlenbündel von der angenommenen geringen Neigung gilt, so gelangt man zu einer Beziehung zwischen den Konstanten des brechenden Systems, die von Seidel 1855 aufgestellt wurde, und die er „Fraunhofersche Bedingung" nannte, da sie von Fraunhofer schon im Jahre 1825 in dem berühmten Königsberger Heliometerobjetiv erfüllt wurde. Später haben dann Seidel[11] und Kerber[12] gezeigt, dass die Fraunhofersche Bedingung in einen sphärisch korrigierten Linsensystem bei Beschränkung auf Aberrationen dritter Ordnung mit der Sinusbedingung übereinstimmt.

Wir gehen jedoch auf die Umformung dieser Bedingung nicht näher ein, sondern beutzen Gleichung (100) zur Ermittlung des Ortes des [M. B.].

## § 4. Umformung der Bedingung für die Komafreiheit auf Parachsialstrahlen.

Wir wollen jetzt unter Voraussetzung achsennaher Strahlen denjenigen Punkt suchen, durch den die Fundamentalstrahlen gehen. Sollen die in (109) auftretenden Grössen nur für das parachsiale Gebiet gelten, so kann man die Kosinusse der Neigungen gleich den zugehörigen

---

11. L. Seidel, Ber. Münch. Ak. d. Wissensch. 28. 395. 1898.
12. A. Kerber, Beiträge zur Dioptrik.

Bögen setzen. Es sollen nun die einzelnen in den Summanden der Gleichung (109) auftretenden Faktoren für das Parachsialgebiet umgeformt werden.

Zufolge Gleichung (108) wird, wenn man statt der Schnittweiten t jetzt die parachsialen Schnittweiten c (siehe oben) einführt:

$$\frac{ds_\varkappa}{ds_1} = \frac{c_\varkappa \cdot c_{\varkappa-1} \cdot \ldots \cdot c_2}{c'_{\varkappa-1} \cdot c'_{\varkappa-2} \cdot \ldots \cdot c_1'} = A_\varkappa, \quad . \quad (110)$$

indem zur Abkürzung das Symbol $A_\varkappa$ eingeführt wird.

Die Grösse $Q_\varkappa = n_\varkappa \sin i_\varkappa = n'_\varkappa \cdot \sin i'_\varkappa$ wird jetzt $n_\varkappa i_\varkappa = n'_\varkappa i'_\varkappa$. Der Ausdruck $Q_\varkappa{}^{I}$ geht in die sog. Nullinvariante über, und wir setzen

$$n'_\varkappa\left(\frac{1}{r_\varkappa} - \frac{1}{c'_\varkappa}\right) = n_\varkappa\left(\frac{1}{r_\varkappa} - \frac{1}{c_\varkappa}\right) = Q_\varkappa{}^{I} = Q_{\varkappa c}, \quad (111)$$

wo der Index c an $Q_{\varkappa c}$ darauf hinweisen soll, dass die parachsialen Schnittweiten in Frage kommen.

Der Ausdruck $\Delta\left(\frac{1}{\varkappa t}\right)_\varkappa$ geht über in

$$\Delta\left(\frac{1}{nt}\right)_\varkappa = \frac{1}{n'_\varkappa c'_\varkappa} = \frac{1}{n_\varkappa c_\varkappa} = B_\varkappa. \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

Führt man diese Grössen ein, so geht Gleichung (109) über in:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\lambda}\left(\frac{ds_\varkappa}{ds_1}\right)^3 Q_\varkappa{}^{1}\, \Delta\left(\frac{1}{nt}\right)_\varkappa \cdot n_\varkappa\, i'_\varkappa = 0$$

oder:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\lambda} A_\varkappa^3\, B_\varkappa\, Q_{\varkappa c}\, n_\varkappa\, i'_\varkappa = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (113)$$

Ist nun im parachsialen Gebiet ein leuchtender Punkt gegeben, der jedoch nicht auf der Achse sondern etwa in der Entfernung y davon liegen soll, so sind die Grössen $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, $Q_{\varkappa C}$ vollständig bestimmt, da diese nur von den Grössen $c_\varkappa$ und $c'_\varkappa$, d. h. von den Schnittweiten vor und nach der Brechung abhängen. Diese Schnittweiten erhält man aber leicht, wenn man vom Fusspunkt des Lotes y ausgeht, durch sukzessive Anwendung der Formeln (69).

Gleichung (113) stellt nun einen linearen Zusammenhang zwischen den sämtlichen Einfallswinkeln $i_\varkappa$ dar, welche sukzessive an den aufeinanderfolgenden Flächen entstehen.

Derjenige vom Objekt ausgehende Strahl, dessen sämtliche Einfallswinkel der Gleichung (113) genügen, ist der gesuchte Träger der kaustischen Spitze nach der Brechung d. h. der Fundamentalstrahl.

## § 5. Transformation der Invarianten $n_\varkappa i_\varkappa$.

In Fig. 13 sind die $(\varkappa-1)^{te}$ und die $\varkappa^{te}$ Fläche eines brechenden Systems dargestellt. PAB sei ein auf die $\varkappa^{te}$ Fläche fallender Strahl, und zwar stellen wir uns darunter

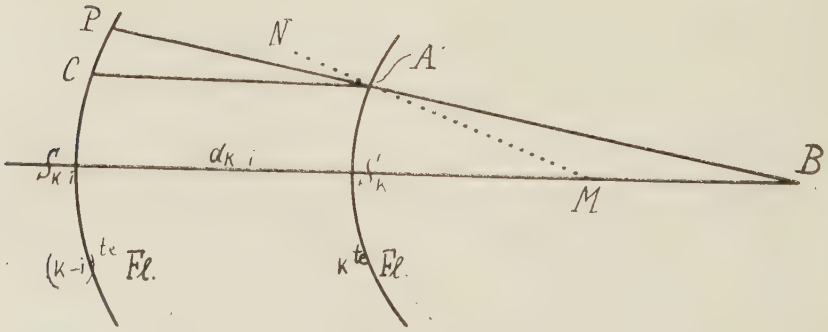


Fig. 13

den Fundamentalstrahl vor, also denjenigen, der im Objektraum durch den Mittelpunkt B der natürlichen Blende geht. Es sei $AM = r_\varkappa = S_\varkappa M$ der Radius der $\varkappa^{ten}$ Fläche und MAN das Einfallslot.

Wir setzen, da wir uns im parachsialen Gebiet befinden:

$$AB = S_\varkappa B = x_\varkappa\,, \quad \sphericalangle PAN = i_\varkappa = \sphericalangle BAM$$

$$AS_\varkappa = j_\varkappa\,, \quad \sphericalangle AMS_\varkappa = \varphi_\varkappa\,, \quad \sphericalangle PBS_\varkappa = u_\varkappa$$

Hierbei ist zu bemerken, dass $j_\varkappa$ eine sehr kleine achsensenkrechte Strecke ist.

Es ist nun:

$$i_\varkappa = \varphi_\varkappa - u_\varkappa$$

$$\varphi_\varkappa = \frac{j_\varkappa}{r_\varkappa}\,, \quad u_\varkappa = \frac{j_\varkappa}{x_\varkappa}$$

Folglich:

$$n_\varkappa . i_\varkappa = j_\varkappa \left(\frac{1}{r_\varkappa} - \frac{1}{x_\varkappa}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

Die Invariante $n_\varkappa i_\varkappa$ stellt sich also dar als die oben angegebene Nullinvariante

$$Q_{\varkappa\,x} = n_\varkappa \left(\frac{1}{r_\varkappa} - \frac{1}{x_\varkappa}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (115)$$

multipliziert noch mit der zugehörigen Einfallshöhe $j_\varkappa$, sodass man hat:

$$n_\varkappa i_\varkappa = j_\varkappa Q_{\varkappa x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (116)$$

Gleichung (113) wird demnach:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\lambda} A^3{}_\varkappa B_\varkappa Q_{\varkappa c} Q_{\varkappa x} j'_\varkappa = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

In Gleichung (117) treten also zwei verschiedene Nullinvarianten auf, deren Bedeutung noch einmal näher erläutert werden soll.

In Fig. 14 sei ein brechendes System zentrierter Kugelflächen dargestellt. PQ sei ein achsensenkrechtes Objekt vor dem System. Selbst wenn wir uns auf achsennahe Strahlen beschränken, so gehen von Q doch unendlich viele Strahlen aus, die allerdings innerhalb eines Raumwinkels von geringer Oeffnung verlaufen.

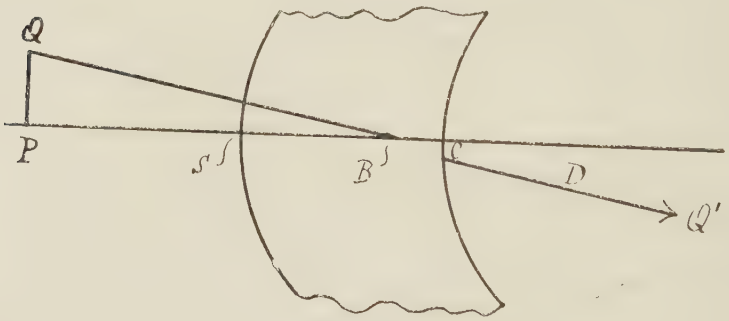


Fig. 14

Einer von ihnen ist der Fundamentalstrahl d. h. derjenige Strahl, der im Bildraum durch die Spitze Q' der Kaustik geht. Der Punkt B ist der Mittelpunkt der natürlichen Blende im Objektraum. Die in Gleichung (117) auftretende Nullinvariante $Q_{\varkappa c}$ gehört dann zu dem vom Fusspunkt P des Objektes PQ ausgehenden Strahl, während die andere Nullinvariante $Q_{\varkappa x}$ dem von Q ausgehenden Fundamentalstrahl angehört, sodass also in Fig. 14 $BS = x_1$ die erste Schnittweite wäre.

## § 6. Die Seidel'schen Sätze über Nullinvarianten.

Für zwei Strahlen, die ein System brechender Flächen im parachsialen Gebiet durchlaufen, seien die beiden Nullinvarianten

$$Q_{\varkappa x} = n'_\varkappa \left(\frac{1}{r_\varkappa} - \frac{1}{x'_\varkappa}\right) = n_\varkappa \left(\frac{1}{r_\varkappa} - \frac{1}{x_\varkappa}\right) \quad . \quad . \quad (118)$$

$$Q_{\varkappa c} = n'_\varkappa \left(\frac{1}{r_\varkappa} - \frac{1}{c'_\varkappa}\right) = n_\varkappa \left(\frac{1}{r_\varkappa} - \frac{1}{c_\varkappa}\right) \quad . \quad . \quad (119)$$

Folglich ist:

$$Q_{\varkappa x} - Q_{\varkappa c} = n'_\varkappa \left(\frac{1}{c'_\varkappa} - \frac{1}{x'_\varkappa}\right) = n_\varkappa \left(\frac{1}{c_\varkappa} - \frac{1}{x_\varkappa}\right) \quad . \quad (120)$$

Infolge sinngemässer Anwendung der zweiten der Gleichungen (69) ergibt sich:

$$c_\varkappa = c'_{\varkappa-1} - d_{\varkappa-1}, \quad x_\varkappa = x'_{\varkappa-1} - d_{\varkappa-1} \quad . \quad . \quad (121)$$

Ferner ist

$$n_\varkappa = n'_{\varkappa-1}$$

Man erhält also:

$$\left.\begin{aligned} Q_{\varkappa x} - Q_{\varkappa c} &= n'_{\varkappa-1} \left(\frac{1}{c'_{\varkappa-1} - d_{\varkappa-1}} - \frac{1}{x'_{\varkappa-1} - d_{\varkappa-1}}\right) \\ &= \frac{n'_{\varkappa-1} \cdot c'_{\varkappa-1} \cdot - x'_{\varkappa-1}(x'_{\varkappa-1} - c'_{\varkappa-1})}{c'_{\varkappa-1} \cdot x'_{\varkappa-1} \cdot c_\varkappa \cdot x_\varkappa} \\ &= \frac{c'_{\varkappa-1} \cdot x'_{\varkappa-1}}{c_\varkappa \cdot x_\varkappa} (Q_{\varkappa-1,\, x} - Q_{\varkappa-1,\, c}) \end{aligned}\right\} \quad (122)$$

Der Strahl mit den Schnittweiten $c_\varkappa$ möge die $\varkappa^{te}$ Fläche n der Höhe $h_\varkappa$ über der Achse schneiden, während die

analoge Grösse für den Strahl mit den Schnittweiten $x_\varkappa$ durch $j_\varkappa$ ausgedrückt sei. Dann besteht die Proportion:

$$\frac{c'_{\varkappa-1}}{c_\varkappa} = \frac{h_{\varkappa-1}}{h_\varkappa}, \quad \frac{x'_{\varkappa-1}}{x_\varkappa} = \frac{j_{\varkappa-1}}{j_\varkappa}.$$

Gleichung (122) wird dann:

$$Q_{\varkappa x} - Q_{\varkappa c} = \frac{j_{\varkappa-1} \cdot h_{\varkappa-1}}{j_\varkappa \cdot h_\varkappa} (Q_{\varkappa-1,\ x} - Q_{\varkappa-1,\ c}) \quad . (123)$$

Analog würde sich ergeben:

$$Q_{\varkappa-1,\ x}\, Q_{\varkappa-1,\ c} = \frac{j_{\varkappa-2} \cdot h_{\varkappa-1}}{j_{\varkappa-1} \cdot h_{\varkappa-2}} (Q_{\varkappa-2,\ x} - Q_{\varkappa-2,\ c}).$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$Q_{\varkappa x} - Q_{\varkappa c} = \frac{j_{\varkappa-2} \cdot h_{\varkappa-2}}{j_\varkappa \cdot h_\varkappa} (Q_{\varkappa-2,\ x} - Q_{\varkappa-2,\ c}).$$

Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man schliesslich:

$$Q_{\varkappa x} - Q_{\varkappa c} = \frac{j_1 h_2}{j_\varkappa h_\varkappa} (Q_{1x} - Q_{1c}) \quad \ldots \quad (124)$$

Ein zweiter von Seidel entwickelter Satz ergibt sich folgendermassen:

In Figur 13 ziehe man AC achsenparallel zwischen der $(\varkappa-1)^{\text{ten}}$ und der $\varkappa^{\text{ten}}$ Fläche. Dann ist:

$$CP = h_{\varkappa-1} - h_\varkappa, \quad AC = d_{\varkappa-1}$$

Aus ähnlichen Dreiecken folgt:

$$\frac{h_{\varkappa-1} - h_\varkappa}{h_{\varkappa-1}} = \frac{d_{\varkappa-1}}{c'_{\varkappa-1}}$$

Analog ergibt sich für den Strahl mit den Schnittweiten x:

$$\frac{j_{\varkappa-1} - j_\varkappa}{j_{\varkappa-1}} = \frac{x'_{\varkappa-1}}{d_{\varkappa-1}}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$\frac{h_\varkappa}{h_{\varkappa-1}} - \frac{j_\varkappa}{j_{\varkappa-1}} = d_{\varkappa-1}\left(\frac{1}{x'_{\varkappa-1}} - \frac{1}{c'_{\varkappa-1}}\right).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\frac{j_{\varkappa-1}}{h_\varkappa}$ und berücksichtigt Gleichung (120), nachdem man den Index $\varkappa$ durch $\varkappa-1$ ersetzt hat, so ergibt sich:

$$\frac{j_\varkappa}{h_\varkappa} - \frac{j_{\varkappa-1}}{h_{\varkappa-1}} = d_{\varkappa-1}\frac{j_{\varkappa-1}}{h_\varkappa}(Q_{\varkappa-1},\ x - Q_{\varkappa-1},\ c)\frac{1}{n'_{\varkappa-1}}.$$

Oder unter Benutzung von Gleichung (124).

$$\frac{j_\varkappa}{h_\varkappa} = \frac{j_{\varkappa-1}}{h_{\varkappa-1}} + h_1 j_1 (Q_1, x - Q_1, c)\frac{d_{\varkappa-1}}{h_{\varkappa-1} \cdot h_\varkappa \cdot n_\varkappa}.$$

Denkt man sich die letzte Gleichung für alle Indizes von $\lambda = 2,3 \ldots \varkappa-1, \varkappa$ hingeschrieben und addiert, so wird:

$$\frac{j_\varkappa}{h_\varkappa} = \frac{j_1}{h_1} + h_1 j_1 (Q_1\, x - Q_1, c)\sum_{\lambda=2}^{\lambda=\varkappa}\frac{d_{\lambda-1}}{h_{\lambda-1} h_\lambda \cdot n_\lambda} \qquad (125)$$

## § 7. Bestimmung des Ortes der natürlichen Blende im Objektraum.

Mittels der beiden Seidelschen Sätze, Gleichung (124) und (125) gelingt nun die Bestimmung auf folgende Weise: Man setze der Kürze halber:

$$Q_{1X} - Q_{1C} = z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (126)$$

Der Ausdruck $\frac{h_\varkappa}{h_1}$ ist identisch mit dem durch Gleichung (110) definierten Symbol $A_\varkappa$, sodass man also hat:

$$\frac{h_\varkappa}{h_1} = A_\varkappa \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (127)$$

Aus Gleichung (124) erhält mon dann:

$$j_\varkappa A_\varkappa Q_{\varkappa X} - j_\varkappa A_\varkappa Q_{\varkappa C} = j_1 z \quad . \quad . \quad . \quad (128)$$

Multipliziert man Gleichung (125) mit $\frac{h_\varkappa}{j_1}$, so ergibt sich

$$\frac{j_\varkappa}{j_1} = A_\varkappa + A_\varkappa \, . \, z \sum_{\lambda=2}^{\lambda=\varkappa} \frac{d_{\lambda-1}}{n_\lambda A_{\lambda-1} A_\lambda} \, .$$

Setzt man

$$\sum_{\lambda=2}^{\lambda=\varkappa} \frac{d_{\lambda-1}}{n_\lambda A_{\lambda-1} A_\lambda} = C_\varkappa , \quad . \quad . \quad . \quad (128\,a)$$

so wird:

$$\frac{j_\varkappa}{j_1} = A_\varkappa + A_\varkappa \, . \, z \, . \, C_\varkappa \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (129)$$

Aus den Gleichungen (128) und (125) folgt:

$$\frac{j_\varkappa \, . \, A_\varkappa \, . \, Q_{\varkappa X}}{j_1} - (A_\varkappa + A_\varkappa z \, . \, C_\varkappa) \, A_\varkappa \, Q_{\varkappa C} = z$$

oder:

$$\frac{j_\varkappa}{j_1} A_\varkappa \cdot Q_{\varkappa x} = A_\varkappa^2 Q_{\varkappa c} + z (1 + A_\varkappa^2 C_\varkappa Q_{\varkappa c}) .$$

Diesen Wert für $\frac{j_\varkappa}{j_1} A_\varkappa Q_{\varkappa x}$ in Gleichung (117) eingesetzt, nachdem diese durch die in Bezug auf $\varkappa$ konstante Grösse $j_1$ dividiert worden ist, ergibt:

$$\Sigma \; A_\varkappa^2 B_\varkappa \; Q_{\varkappa c} [A_\varkappa^2 \; Q_{\varkappa c} + z (1 + A_\varkappa^2 C_\varkappa \; Q_{\varkappa c})] = 0 \quad (130)$$

wo die Summierung von $\varkappa = 1$ bis $\varkappa = m$ auszudehnen ist, wenn das System aus m brechenden Flächen besteht. Diese Gleichung ist schon von Herrn Gleichen entwickelt worden[19]. Die Gleichung (130) ist linear in Bezug auf die Unbekannte z. Ist die letztere bestimmt, so folgt $Q_{1x}$ aus Gleichung (126) und dann die gesuchte Entfernung $x_1$ des [M. B.] im Objektraum aus der Gleichung:

$$Q_{1,\varkappa} = n_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{x_1}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (131)$$

Aus den Gleichungen (126) und (131) folgt:

$$n_1 \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{x_1}\right) = z \quad : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (132)$$

Für $c_1 = \infty$ und $n_1 = 1$ folgt aus der Gleichung (132).

$$x_1 = -\frac{1}{z} , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (133)$$

eine Gleichung, die später noch oft Anwendung finden wird.

Die in Gleichung (130) auftretenden Grössen $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, $Q_{\varkappa c}$, $C_\varkappa$ sind bestimmt durch die Gleichungen (110), (112),

(111), (128a). Zu bemerken ist noch, dass das Symbol $C_1$ den Wert Null, das Symbol $A_1$ den Wert Eins hat.

## § 8. Ein einfaches Beispiel.

Es soll nun an einem einfachen Beispiel gezeigt werden, wie mit Hilfe der Gleichung (130) die Berechnung des Ortes des [M. B.] im Objektraum vor sich geht.

Bevor jedoch die Durchrechnung vorgenommen wird, soll aus Gründen der Zweckmässigkeit eine Aenderung in der Schreibweise eingeführt werden. Man könnte allerdings die bisher gebrauchte Schreibweise auch weiter anwenden, jedoch erscheint sie zur praktischen Verwendung nicht geeignet insbesondere dadurch, dass an einer und derselben Grösse sich zwei Indizes befinden, denn wird z. B. der obere aus Versehen einmal weggelassen, so wird die betr. Grösse mit einer andern scheinbar identisch, was die Entstehung weiterer Fehler erleichtert.

Wir setzen deshalb für die parachsialen Schnittweiten:

$$\left.\begin{array}{ll} c_1 = p_0 & c_1' = p' \\ c_2 = p_1 & c_2' = p'' \\ c_3 = p_2 & c_3' = p''' \\ \text{usw.} & c_4' = p'''' \text{ od. } p^4 \\ \text{allgemein} & \text{usw.} \\ c_\varkappa = p_{\varkappa-1} & \text{allgemein} \\ & c'_\varkappa = p^{(\varkappa)} \end{array}\right\} \quad . \quad (134)$$

Bei einer grösseren Anzahl brechender Flächen ersetzt man die Striche oben durch Zahlen, da eine Verwechslung mit einer Potenz ausgeschlossen ist. Die Radien der brechenden Flächen werden der Reihe nach mit $r_0$, $r_1 \ldots$ bezeichnet. Die Entfernungen der aufeinander folgenden Flächen sind wie früher $d_1$, $d_2 \ldots$, die Brechungsexponenten

werden der Reihe nach $n_0$, $n_1$ . . . genannt, wobei zu bemerken ist, dass $n_0$ gleich Eins ist, da der Brechungsexponent der Luft gleich der Einheit geseszt werden kann.

In der neuen Schreibweise werden die Gleichungén (69), wenn man den Index $\varkappa$ unterdrückt, sich also auf die Brechung an der ersten Fläche beschränkt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{n_1}{p'} \quad \frac{n_0}{p_0} &= \frac{n_1 - n_0}{r_0} \\ p_1 &= p' - d_1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (135)$$

Für jede folgende Fläche ist also der Index um eine Einheit zu erhöhen.

Aus den Gleichungen (135) folgen leicht die Gleichungen:

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p_0} \cdot \frac{n_0}{n_1} + \frac{1}{r_0} (n_1 - n_0) \frac{1}{n_1} \quad . \quad . \quad (136)$$

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p'} \frac{1}{1 - \frac{d_1}{p'}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (137)$$

mit denen die Durchrechnung von Fläche zu Fläche vorzunehmen ist.

Als Beispiel wählen wir die schon im ersten Kapitel nach andrer Richtung hin untersuchte halbkugelförmige Konvexplanlinse. Zugrunde gelegt sind die Daten:

| Radien | Dicke | Brechungsexponenten |
|---|---|---|
| $r_0 = 1$ | $d = 1$ | $n_0 = 1$ |
| $r_1 = \infty$ | | $n_1 = 1.6$ |
| | | $n_2 = 1$ |

Die Berechnung der Schnittweiten der Parachsialstrahlen

geschieht durch sukzessive Anwendung der Gleichungen (136), (137):

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p_0} \cdot \frac{n_0}{n_1} + \frac{1}{r_0}(n_1 - n_0)\frac{1}{n_1}\,; \quad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{p'}\,\frac{1}{1 - \frac{d_1}{p'}}$$

Nimmt man die Lichtquelle unendlich fern an, so wird $p_0 = \infty$ und es ergibt sich, wenn man für jede folgende Kolonne den Index der Schnittweiten, Brechungsexponenten etc. um Eins erhöht:

| | | |
|---|---|---|
| $\log \frac{1}{p_0}$ | | 0,77 815 — 1 |
| $\log \frac{n_0}{n_1}$ | | 0,20 411 |
| $\log \frac{n_0}{n_1} \cdot \frac{1}{p_0}$ | | 0,98 227 — 1 |
| $\log \frac{1}{r_0}$ | 0 | |
| $\log (n_1 - n_0)$ | 0,77 815 — 1 | |
| $\log \frac{1}{n_1}$ | 0,79 588 — 1 | |
| $\log \frac{1}{r_0}(n_1 - n_0)\frac{1}{n_1}$ | 0,57 403 — 1 | |

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{n_0}{n_1} \cdot \frac{1}{p_0}$ | 0 | 0,96 |
| $\frac{1}{r_0}\,\frac{n_1 - n_0}{n_1}$ | 0,375 | 0 |
| $\frac{1}{p'}$ | 0,375 | 0,96 |
| $\log \frac{1}{p'}$ | 0,57403 — 1 | 0,98227 — 1 |
| $\log d_1$ | 0 | |
| $\log \frac{d_1}{p'}$ | 0,57403 — 1 | |

| | |
|---|---|
| $1 - \frac{d_1}{p'}$ | 0,625 |
| $\log \frac{1}{p'}$ | 1,57 403 — 3 |
| $\log \left(1 - \frac{d_1}{p'}\right)$ | 0,79 588 — 1 |
| $\log \frac{1}{p_1}$ | 0,77 815 — 1 |

Folglich erhält man:

$\log p' = 0{,}42\,597$
$\log p'' = 0{,}01\,773$
$\log p_1 = 0{,}22\,185$

Berechnung der Grössen A zufolge Gleichung (110).

| | |
|---|---|
| $\log p_1$ | 1,22 185 — 1 |
| $\log p'$ | 0,42 597 |
| | 0,79 588 — 1 |
| $A_0 = 1$ | $A_1 = 0{,}625$ |

Berechnung der Grössen B zufolge Gleichung (112).

| | | |
|---|---|---|
| $\log p'$ | 0,42 597 | 0,01 773 |
| $\log n_1$ | 0,20 412 | 0 |
| $\log p' . n_1$ | 0,63 009 | 0,01 773 |

| | | |
|---|---|---|
| $\log \frac{1}{p' \cdot n_1}$ | 0,36 991 — 1 | 0,98 227 — 1 |
| $\log p_0$ | | 0,22 185 |
| $\log n_0$ | | 0,20 412 |
| $\log n_0 \cdot p_0$ | | 0,42 597 |
| $\log \frac{1}{p_0 \cdot n_0}$ | | 0,57 403 — 1 |
| $\frac{1}{p' n_1}$ | 0,23 437 | 0,96 |
| $\frac{1}{p_0 n_0}$ | 0 | 0,375 |
| Bo | 0,23 427 | 0,585 |
| log Bo | 0,36 991 — 1 | 0,76 716 — 1 |

Berechnung der Grössen Q nach Gleichung (111).

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{1}{r_0}$ | 1 | 0 |
| $\frac{1}{p'}$ | 0,375 | 0,96 |
| $\frac{1}{r_0} - \frac{1}{p'}$ | 0,625 | —0,96 |

| | | |
|---|---|---|
| $\log \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{p'}\right)$ | 0,79 588 — 1 | 0,98 227 — 1 — |
| $\log n_1$ | 0,20 412 | 0 |
| $\log Q_0$ | 0,00 000 | 0,98 227 — 1 — |
| $Q_0$ | 1 | — 0,96 |

Berechnung der Grössen C nach Gleichnng (128a).

| | |
|---|---|
| $\log n_1$ | 0,20 412 |
| $\log A_1$ | 0,79 588 — 1 |
| $\log n_1 A_1$ | 0,00 000 |

| | |
|---|---|
| $\log \frac{1}{n_1 A_1}$ | 0 |
| $\log d_1$ | 0 |
| $\log C_1$ | 0 |
| $C_1$ | 1 |

Berechnung der Koeffizienten von z und der von z freien Glieder nach Gleichug (130).

| | | |
|---|---|---|
| $\log A_0^2$ | | 0,59 176 — 1 |
| $\log C_0$ | | 0 |
| $\log Q_0$ | | 0,98 227 — 1 — |
| $\log A_0^2 C_0 Q_0$ | | 0,57 403 — 1 — |
| $A_0^2 C_0 Q_0$ | | — 0,375 |
| $1 + A_0^2 C_0 Q_0$ | | 0,265 |
| | | |
| $\log A_0^2$ | | 0,59 176 — 1 |
| $\log Q_0$ | | 0,98 227 — 1 — |
| $\log A_0^2 Q_0$ | | 0,57 403 — 1 — |
| | | |
| $\log A_0^2$ | 0 | 0,59 176 — 1 |
| $\log B_0$ | 0,36 991 — 1 | 0,76 716 — 1 |
| $\log Q_0$ | 0 | 0,98 227 — 1 — |
| $\log A_0^2 B_0 Q_0$ | 0,36 991 — 1 | 0,34 119 — 1 — |
| $\log A_0^2 Q_0$ | 0 | 0,57 403 — 1 — |
| $\log A_0^2 B_0 Q_0 \cdot A_0^2 Q_0$ | 0,36 991 — 1 | 0,91 522 — 2 |
| | | |
| $\log A_0^2 B_0 Q_0)$ | 0,36 991 — 1 | 0,34 119 — 1 — |
| $\log (1 + A_0^2 C_0 Q_0)$ | 0 | 0,79 588 — 1 |
| $\log A_0^2 B_0 Q_0 (1 + A_0^2 C_0 Q_0)$ | 0,36 991 — 1 | 0,13 707 — 1 — |
| | | |
| $A_0^2 B^0 Q_0 (1 + A_0^2 C_0 Q_0)$ | 0,23 437 | — 0,13 711 |
| $A_0^2 B_0 Q_0 \cdot A_0^2 Q_0$ | 0,23 437 | 0,082 266 |

| Summation über die von z freien Glieder | Summation über die Koeffizienten von z |
|---|---|
| 0,23 437 | 0,23 437 |
| 0,08 2266 | 0,13 711 |
| 0,31 6636 | 0,09 726 |

Die Gleichung zur Berechnung von z wird dann also zufolge Gleichung (130):

$$0{,}31\,6636 + 0{,}09\,726\,z = 0$$

Folglich ergibt sich:

$$z = -\frac{0{,}31\,6636}{0{,}09\,726}$$

Also nach Gleichung (133):

$$x_1 = \frac{0{,}09\,726}{0{,}31\,6636} = 0{,}3072$$

oder abgekürzt

$$x_1 = 0{,}31\,,$$

d. h. der [M. B.] liegt 0,31 Einheiten — den Radius der vorderen Fläche als Einheit genommen — von der ersten Linsenfläche entfernt, wie schon oben erwähnt war.

## Kapitel III.

Anwendung der Theorie der natürlichen Blende auf spezielle Fälle.

Schon bei einem so einfachen Fall wie ihn die halbkugelförmige Konvexplanlinse bietet, war die Berechnung des Ortes des [M. B.] im Objektraum mit Hilfe der Gleichung (130) ziemlich umständlich, umsomehr wird dies bei Systemen aus mehreren brechenden Flächen der Fall sein besonders dann, wenn es sich um die Neukonstruktion eines Systems handelt, denn hierbei ist man gezwungen, die Konstanten verschiedentlich zu ändern, und nach jeder Aenderung müsste man von neuem die Berechnung des Ortes des [M. B.] im Objektraum in der oben angegebenen Weise vornehmen. Es erschien dem Verfasser daher geboten, für einige Fälle, die infolge ihrer Wichtigkeit von besonderem Interesse sind, neue Formeln aufzustellen, mit deren Hilfe man die Bestimmung des Ortes des [M. B.] im Objektraum leichter vornehmen kann als nach Gleichung (130).

### § 1. Die unendlich dünne, in Luft befindliche Linse.

Im Fall einer unendlich dünnen Linse kann man zunächst in Gleichung (130) die Dicken vernachlässigen. Es ist dann offenbar $A_\varkappa = 1$ und $C_\varkappa = 0$. Gleichung (130) geht über in:

$$\Sigma B_\varkappa Q_{\varkappa C} (Q_{\varkappa C} + z) = 0$$

oder:

$$\Sigma Q^2_{\varkappa c} \Delta\left(\frac{1}{nc}\right)_\varkappa + z \Sigma Q_{\varkappa c} \Delta\left(\frac{1}{nc}\right)_\varkappa = 0$$

$$z = -\frac{\Sigma Q^2_{\varkappa c} \Delta\left(\frac{1}{nc}\right)_\varkappa}{\Sigma Q_{\varkappa c} \Delta\left(\frac{1}{nc}\right)_\varkappa} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (138)$$

Für eine einzige dünne, von Luft umgebene Linse isr ferner:

$$Q_{1c} = n_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{c_1}\right) = n_1'\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{c_1'}\right)$$

$$Q_{2c} = n_2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{c_2}\right) = n_2'\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{c_2'}\right)$$

$$c_2 = c_1'$$

Bezeichnet man mit n den Brechungsexponenten der Linsensubstanz, so ist:

$$n_1 = n_2' = 1$$

$$n_1' = n_2 = n$$

Setzt man ferner noch:

$$c_1 = a\,,\ c_2' = b\,,\ \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

und setzt man weiter $a = \infty$, $b = f$, nimmt also an, dass das Objekt sehr entfernt ist, dann wird:

$$Q_{1c} = \frac{1}{r_1} = n\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{c_1'}\right)$$

$$Q_{2c} = n\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{c_2}\right) = \frac{1}{r_2} - \frac{1}{f}$$

und also:

$$\frac{1}{c_1'} = \frac{1}{c_2} = \frac{n-1}{n \cdot r_1}$$

$$J\left(\frac{1}{nc}\right)_1 = \frac{1}{n_1' c_1'} - \frac{1}{n_1 c_1} = \frac{n-1}{n^2 r_1}$$

$$J\left(\frac{1}{nc}\right)_2 = \frac{1}{n_2' c_2'} - \frac{1}{n_2 c_2} = \frac{1}{f} - \frac{n-1}{n^2 r_1}$$

Also ergibt sich:

$$z = -\frac{\frac{1}{r_1^2}\frac{n-1}{n^2 r_1} + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{f}\right)^2 \left(\frac{1}{f} - \frac{n-1}{n^2 r_1}\right)}{\frac{1}{r_1}\frac{n-1}{n^2 r_1} + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{f}\right)\left(\frac{1}{f} - \frac{n-1}{n^2 r_1}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad (139)$$

eine Formel, die schon Herr Gleichen[1] entwickelt hat. Wir wollen die Gleichung (139) noch weiter vereinfachen.

Für eine in Luft befindliche Linse ohne Dicke gilt bekanntlich die Beziehung:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (140)$$

Setzt man f gleich einer Konstanten, so kann man in Gleichung (140) $r_1$ als unabhängige und $r_2$ als abhängige Variable auffassen. Aus Gleichung (140) folgt:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{f\,(n-1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (141)$$

Setzt man in Gleichung (139) für $\frac{1}{r_1}$ den Wert (141) ein und beachtet ferner, dass für den vorliegenden Fall

$x_1 = -\frac{1}{z}$ ist (siehe Gl. 133), so geht Gleichung (134) über in:

$$x_1 = -\frac{\frac{1}{r_1}\frac{n-1}{n^2 r_1} + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{f(n-1)} - 1\right)\left(1 - \frac{n-1}{n^2 r_1}\right)}{\frac{1}{r_1^2}\frac{n-1}{n^2 r_1} + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{f(n-1)} - 1\right)^2\left(1 - \frac{n-1}{n^2 r_1}\right)}$$

Nach einiger Umformung erhält man hieraus:

$$x_1 = \frac{f^2 r_1 (n^3 - n^2 - n + 1) - f r_1^2 (n^3 - n^2)}{f^2 (n^3 - 3n + 2) - f r_1 (2n^3 - n^2 - n) + n^3 r_1^2} \quad (142)$$

Man führe folgende Grössen ein:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= n^3 - n^2 - n + 1 \\ \mu_2 &= n^3 - n^2 \\ \mu_3 &= n^3 - 3n + 2 \\ \mu_4 &= 2n^3 - n^2 - n \\ \mu_5 &= n^3, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (143)$$

wobei zu beachten ist, dass diese Grössen nur von dem Brechungsexponenten n der Linsensubstanz abhängen. Gleichung (142) geht dann über in:

$$x_1 = \frac{f^2 r_1 \mu_1 - f r_1^2 \mu_2}{f^2 \mu_3 - f r_1 \mu_4 + r_1^2 \mu_5} \quad \ldots \quad (144)$$

Setzt man jetzt $f = 1$, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit geschehen kann, so wird:

$$x_1 = \frac{r_1 \mu_1 - r_1^2 \mu_2}{\mu_3 - r_1 \mu_4 + r_1^2 \mu_5} \quad \ldots \quad (145)$$

Wir sind also zu folgenden Resultat gekommen:

Will man für eine dünne, in Luft be-

findliche Linse den Ort des [M. B.] im Objektraum berechnen, so bestimme man aus dem Brechungsexponenten n der Linsensubstanz die Werte:

$$\mu_1 = n^3 - n^2 - n + 1$$
$$\mu_2 = n^3 - n^2$$
$$\mu_3 = n^3 - 3n + 2$$
$$\mu_4 = 2n^3 - n^2 - n$$
$$\mu_5 = n^3$$

Aus diesen Werten $\mu$ und dem Radius $r_1$ der vorderen Linsenfläche berechnet sich dann die Entfernung $x_1$ des [M. B.] im Objektraum vom Scheitel der Linse nach der Gleichung:

$$x_1 = \frac{r_1 \mu_1 - r_1^2 \mu_2}{\mu_3 - r_1 \mu_4 + r_1^2 \mu_5}$$

Hierbei ist noch zu beachten, dass $f = 1$ angenommen ist.

Aus Gleichung (145) ist ersichtlich, dass bei einer dünnen Linse die Entfernung $x_1$ des [M. B.] im Objektraum von der Linse nur eine Funktion von $r_1$ allein ist, sobald man einen bestimmten Brechungsexponenten n der Linsensubstanz zugrunde legt.

Es soll jetzt für $n = {}^3/_2$ untersucht werden, wie sich $x_1$ mit $r_1$ ändert, wobei also wieder $f = 1$ gesetzt ist.

Aus $n = {}^3/_2$ ergeben sich nach (143) die Werte:

$$\mu_1 = {}^5/_8 \qquad \mu_4 = 3$$
$$\mu_2 = {}^9/_8 \qquad \mu_5 = {}^{27}/_8$$
$$\mu_3 = {}^7/_8$$

Wir betrachten zunächst den Fall einer Plankonvex-

linse d. h. wir setzen $r_1 = \infty$. Gleichung (145) nimmt dann die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$ an. Dividieren wir Zähler und Nummer der Gleichung (145) durch $r_1^2$ und setzen nachträglich $r_1 = \infty$, so erhalten wir:

$$x_1 = -\frac{\mu_2}{\mu_5} = \frac{1}{n} - 1 = -0{,}33 \ldots$$

Tabelle I gibt nun die Lage des [M. B.] im Objektraum an, wenn $r_1$ das Intervall von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft. Gleichzeitig ist noch immer der zugehörige Wert $r_2$ angegeben, wie er sich aus Gleichung (140) ergibt, wenn man $f = i$ setzt.

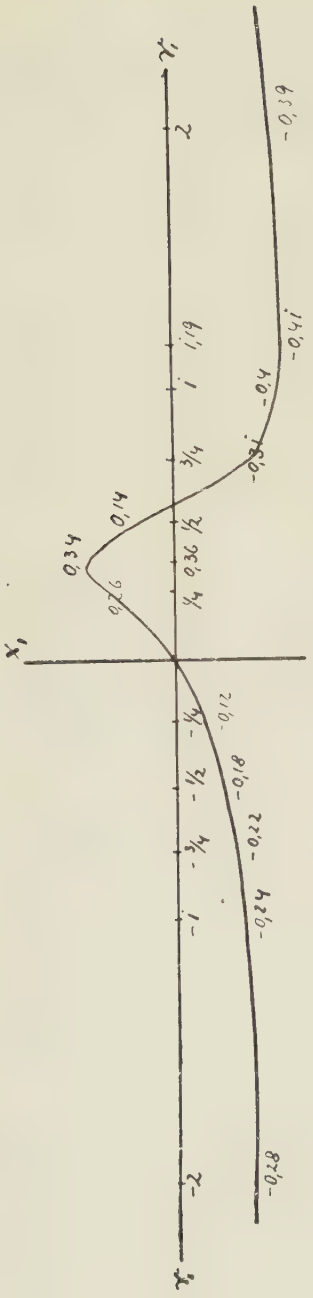


Fig. 15

**Tabelle I.**

| Radius $r_1$ der vorderen Linsenfläche | Radius $r_2$ der hinteren Linsenfläche | Entfern. des [M.B.] i. Objekt-raum v. d. Linse |
|---|---|---|
| — ∞ | — 0,50 | — 0,33 |
| — 100 | — 0,50 | — 0,33 |
| — 20 | — 0,49 | — 0,33 |
| — 15 | — 0,48 | — 0,33 |
| — 10 | — 0,48 | — 0,32 |
| — 9 | — 0,47 | — 0,32 |
| — 8 | — 0,47 | — 0,32 |
| — 7 | — 0,47 | — 0,32 |
| — 6 | — 0,45 | — 0,32 |
| — 5 | — 0.45 | — 0,31 |
| — 4 | — 0,44 | — 0,31 |
| — 3 | — 0,43 | — 0,30 |
| — 2 | — 0,40 | — 0,28 |
| — 1 | — 0,33 | — 0,24 |
| — 0,75 | — 0,30 | — 0,22 |
| — 0,5 | — 0,25 | — 0,18 |
| — 0,25 | — 0,17 | — 0,12 |
| $r_1$ sehr klein | $r_2$ sehr klein | 0 |
| + 0,25 | + 0,50 | + 0,26 |
| + 0,36 | + 1,29 | + 0,34 |
| + 0,5 | ∞ | + 0,14 |
| + 0,55 | — 5,50 | 0 |
| + 0,75 | — 1,50 | — 0,31 |
| + 1 | — 1 | — 0,40 |
| + 1,19 | — 0,86 | — 0,41 |
| + 2 | — 0,67 | — 0,39 |
| + 3 | — 0,60 | — 0,37 |
| + 4 | — 0,57 | — 0,36 |
| + 5 | — 0,56 | — 0,36 |
| + 6 | — 0,55 | — 0,35 |
| + 7 | — 0,54 | — 0,35 |
| + 8 | — 0,53 | — 0,35 |
| + 9 | — 0,53 | — 0,35 |
| + 10 | — 0,53 | — 0,34 |
| + 15 | — 0,52 | — 0,34 |
| + 20 | — 0,51 | — 0,34 |
| + 30 | — 0,51 | — 0,34 |
| + 50 | — 0,51 | — 0,34 |
| + 100 | — 0,50 | — 0,34 |
| + ∞ | — 0,50 | — 0,33 |

In Fig. 15 ist nun die Kurve dargestellt, die sich ergibt, wenn man die Werte für $r_1$ auf der Abscissenachse und die zugehörigen Werte von $x_1$ auf der Ordinatenachse abträgt. Extreme Lagen nimmt der [M. B.] im Objektraum eim für $r_1 = 0{,}36$ und $r_1 = 1{,}19$.

### Diskussion der Kurve.

Aus der Fig. 15 ersieht man folgendes: Für eine vorn plane Linse liegt der [M. B.] 0,33 Einheiten — die Brennweite als Einheit genommen —, d. heisst also um etwa $^1/_3$ f vor der Linse. Wird $r_1$ absolut genommen allmählich kleiner, so nähert sich der [M. B.] der Linse. Für einen sehr kleinen Betrag von $r_1$ fällt der [M. B.] mit dem Scheitel der Linse zusammen.

Nimmt jetzt $r_1$ positive Werte an, so tritt der [M. B.] im Objektraum hinter die Linse. Für $r_1 = 0{,}36$ nimmt er einen extremem Wert an, es ist dann $x_1 = 0{,}34$, d. h. der [M. B.] im Objektraum liegt ungfähr $^1/_3$ f hinter der Linse. Wächst $r_1$ noch mehr, so nähert sich der [M. B.] wieder der Linse, die er für $r_1 = 0{,}55$ erreicht. Für noch grössere Werte von $r_1$ tritt der [M. B.] wieder vor die Linse und erreicht für $r_1 = 1{,}19$ abermals einen extremen Wert, er liegt dann 0,41 Einheiten von der Linse. Wächst $r_1$ noch mehr, so wird $x_1$ wieder kleiner und nähert sich dem Werte — 0,33, den er für $r_1 = \infty$, d. h. für eine vorne plane Linse erreicht.

### Spezielle Fälle:

Es soll die Lage des [M. B.] im Objektraum ermittelt werden für einige Fälle, in denen der Radius $r_2$ der hinteren Linsenfläche eine vorgeschriebene Grösse hat.

1. Hinten plane Linse.

Aus der Gleichung (140) ergibt sich, wenn man $r_2 = \infty$ setzt: $r_1 = 0{,}5$. Aus der Tabelle I entnimmt man den zugehörigen Wert $x_1 = 0{,}14$, d. h. bei einer hinten planen

Linse ohne Dicke liegt der [M. B.] im Objektraum 0,14 Einheiten — f als Einheit genommen — hinter der Linse.

2. Die bikonvexe gleichseitige Linse.

In diesem Falle ist $r_2 = r_1$. Gleichung (140) gibt $r_1 = 1$ zufolge der Tabelle I ist dann $x_1 = 0{,}4$. Bei dieser Linse hat also der [M. B.] nahezu seine extremste Lage vor der Linse erreicht.

3. Die bikonkave gleichseitige Linse.

In Gleichung 144 ist jetzt zu setzen für $r_1 : -r_1$ und für $r_2 : r_1$. Es ergibt sich $r_1 = -1$. Die Tabelle I liefert $x_1 = -0{,}24$.

Aus Gleichung (142) folgt übrigens, dass, wenn man f ver -n-facht, was dadurch geschieht, dass man die beiden Radien n Mal so gross wählt, sich auch $x_1$ ver -n-facht.

## § 2. System aus zwei dünnen Linsen im Abstande e voneinander.

Um in einem beliebigen zentrierten System brechender Kugelflächen den Ort des [M. B.] im Objektraum zu ermitteln, hatte sich die Gleichung ergeben:

$$\Sigma A^2_\varkappa B_\varkappa Q_{\varkappa c} [A^2_\varkappa Q_{\varkappa c} + z (1 + A^2_\varkappa C_\varkappa Q_{\varkappa c})] = 0, \ldots \quad (146)$$

wo die Summierung von $\varkappa = 1$ bis $\varkappa = m$ vorzunehmen war, wenn das System aus m brechenden Flächen bestand. Aus Gleichung (146) folgt:

$$\Sigma A^4_\varkappa B_\varkappa Q_{\varkappa c}^2 + z \Sigma A^2_\varkappa B_\varkappa Q_{\varkappa c} (1 + A^2_\varkappa C_\varkappa Q_{\varkappa c}) = 0$$

oder

$$z = - \frac{\Sigma A^4_\varkappa B_\varkappa Q^2_{\varkappa c}}{\Sigma A_\varkappa{}^2 B_\varkappa Q_{\varkappa c} (1 + A_\varkappa{}^2 C_\varkappa Q_{\varkappa c})} \quad (147)$$

Im vorliegenden Falle ist $n_1 = 1$, denn wir denken

uns die Linsen von Luft umgeben. Nimmt man ausserdem $c_1 = \infty$ an, so wird Gleichung (147), wenn man Gleichung (133) berücksichtigt:

$$x_1 = \frac{\Sigma A^2_\varkappa B_\varkappa Q_{\varkappa C} (1 + A^2_\varkappa C_\varkappa Q_{\varkappa C})}{\Sigma A^4_\varkappa B_\varkappa Q^2_{\varkappa C}} \quad . \quad . \quad (148)$$

In dieser Gleichung ist zufolge (110), (112), (128a), (111):

$$A_\varkappa = \frac{c_\varkappa \cdot c_{\varkappa-1} \cdot \ldots \cdot c_2}{c'_{\varkappa-1} \cdot c'_{\varkappa-2} \cdot \ldots \cdot c_1'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (149)$$

$$B_\varkappa = \Delta\left(\frac{1}{nc}\right)_\varkappa = \frac{1}{n_\varkappa' c_\varkappa'} - \frac{1}{n_\varkappa c_\varkappa} \quad . \quad . \quad . \quad (150)$$

$$C_\varkappa = \sum_{\lambda=2}^{\lambda=\varkappa} \frac{d_{\lambda-1}}{n_\lambda A_{\lambda-1} A_\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (151)$$

$$O_{\varkappa C} = n'_\varkappa \left(\frac{1}{r_\varkappa} - \frac{1}{c'_\varkappa}\right) = n_\varkappa \left(\frac{1}{r_\varkappa} - \frac{1}{c_\varkappa}\right) \quad . \quad (152)$$

Im vorliegenden Falle ist die Anzahl der brechenden Flächen vier. Setzt man also unter Berücksichtigung von (149), (150), (151), (152) in (148) die Grösse $\varkappa$ der Reihe nach 1, 2, 3, 4, so erhält man:

$$x_1 = \frac{A_1^2 B_1 Q_1 (1 + A_1^2 C_1 Q_1) + A_2^2 B_2 Q_2 (1 + A_2^2 C_2 Q_2)}{A_1^4 B_1 Q_1^2 + A_2^4 B_2 Q_2^2 + A_3^4 B_3 Q_3^2 + A_4^4 B_4 Q_4^2} + \frac{A_3^2 B_3 Q_3 (1 + A_3^2 C_3 Q_3) + A_4^2 B_4 Q_4 (1 + A_4^2 C_4 Q_4)}{A_1^4 B_1 Q_1^2 + A_2^4 B_2 Q_2^2 + A_3^4 B_3 Q_3^2 + A_4^4 B_4 Q_4^2} \quad (153)$$

Aus Gleichung (149) folgt, wenn man $\varkappa$ der Reihe nach 1, 2, 3, 4 setzt:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 1 \\ A_2 &= \frac{c_2}{c_1'} \\ A_3 &= \frac{c_3\, c_2}{c_2'\, c_1'} \\ A_4 &= \frac{c_4\, c_3\, c_2}{c_3'\, c_2'\, c_1'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (154)$$

Ebenso folgt aus Gleichung (150):

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{n_1'\, c_1'} - \frac{1}{n_1\, c_1} \\ B_2 &= \frac{1}{n_2'\, c_2'} - \frac{1}{n_2\, c_2} \\ B_3 &= \frac{1}{n_3'\, c_3'} - \frac{1}{n_3\, c_3} \\ B_4 &= \frac{1}{n_4'\, c_4'} - \frac{1}{n_4\, c_4} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (155)$$

Aus Gleichung (151) folgt:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= \frac{d_1}{n_2\, A_1\, A_2} \\ C_3 &= \frac{d_1}{n_2\, A_1\, A_2} + \frac{d_2}{n_3\, A_2\, A_3} \\ C_4 &= \frac{d_1}{n_2\, A_1\, A_2} + \frac{d_2}{n_3\, A_2\, A_3} + \frac{d_3}{n_4\, A_3\, A_4} \end{aligned}\right\} \quad (156)$$

Aus Gleichung (152) endlich folgt:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= n_1'\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{c_1'}\right) = n_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{c_1}\right) \\ Q_2 &= n_2'\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{c_2'}\right) = n_2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{c_2}\right) \\ Q_3 &= n_3'\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{c_3'}\right) = n_4\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{c_3}\right) \\ Q_4 &= n_4'\left(\frac{1}{r_4} - \frac{1}{c_4'}\right) = n_4\left(\frac{1}{r_4} - \frac{1}{c_4}\right) \end{aligned}\right\} \quad (157)$$

Die Grössen $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, $C_\varkappa$, $Q_{\varkappa c}$ hängen also nur ab von den Grössen $n_\varkappa$, $c_\varkappa$, $d_\varkappa$. Während die beiden Grössen $n_\varkappa$ und $d\varkappa$ zu den Konstanten des Systems gehören, sollen die Grösse $c_\varkappa$ jetzt bestimmt werden, und zwar sollen sie als Funktionen der Konstanten des Systems dargestellt werden.

Nach (69) ist für zwei aufeinander folgende Flächen eines beliebigen zentrierten Systems:

$$\left.\begin{aligned} \frac{n'_{\varkappa-1}}{c'_{\varkappa-1}} - \frac{n_{\varkappa-1}}{c_{\varkappa-1}} &= \frac{n'_{\varkappa-1} - n_{\varkappa-1}}{r_{\varkappa-1}} \\ c_\varkappa &= c'_{\varkappa-1} - d_{\varkappa-1} \\ \frac{n'_\varkappa}{c'_\varkappa} - \frac{n_\varkappa}{c_\varkappa} &= \frac{n'_{\varkappa-1} - n_\varkappa}{r_\varkappa} \end{aligned}\right\} \qquad (158)$$

Setzt man in (158) $\varkappa$ der Reihe nach 2, 3, 4 so folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{n_1'}{c_1'} - \frac{n_1}{c_1} &= \frac{n_1' - n_1}{r_1} \\ c_2 &= c_1' - d_1 \\ \frac{n_2'}{c_2'} - \frac{n_2}{c_2} &= \frac{n_2' - n_2}{r_2} \\ c_3 &= c_2' - d_2 \\ \frac{n_3'}{c_3'} - \frac{n_3}{c_3} &= \frac{n_3' - n_3}{r_3} \\ c_4 &= c_3' - d_3 \\ \frac{n_4'}{c_4'} - \frac{n_4}{c_4} &= \frac{n_4' - n_4}{r_4} \end{aligned}\right\} \qquad (160)$$

Der Brechungsexponent der beiden Linsensubstanzen sei bezgl. $v_1$ und $v_2$, der Brechungsexponent der Luft gleich Eins. Dann ist also:

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= n_2' = n_3 = n_4' = 1 \\ n_1' &= n_2 = \nu_1 \\ n_3' &= n_4 = \nu_2 \end{aligned}\right\} \qquad (160)$$

Berücksichtigt man ferner, dass $c_1 = \infty$ angenommen war und dass, da die Linsen unendlich dünn sind und ihr Abstand gleich e ist, $d_1 = d_3 = 0$, $d_2 = e$ ist, so geht (159) über in:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\nu_1}{c_1'} &= \frac{\nu_1 - 1}{r_1} \\ c_2 &= c_1' \\ \frac{1}{c_2'} - \frac{\nu_1}{c_2} &= \frac{1-\nu_1}{r_2} \\ c_3 &= c_2' - e \\ \frac{\nu_2}{c_3'} - \frac{1}{c_3} &= \frac{\nu_2 - 1}{r_3} \\ c_4 &= c_3' \\ \frac{1}{c_4'} - \frac{\nu_2}{c_4} &= \frac{1-\nu_2}{r_4} \end{aligned}\right\} \qquad (161)$$

Aus (161) folgt leicht:

$$\frac{1}{c_2'} = \frac{\nu_1 - 1}{r_1} + \frac{1-\nu_1}{r_2} = (\nu_1 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad (162)$$

und ebenso:

$$\frac{1}{c_4'} - \frac{1}{c_3} = (\nu_2 - 1)\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right) \qquad (163)$$

Man setze:

$$\frac{1}{f_1} = (\nu_1 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad (164)$$

und

$$\frac{1}{f_2} = (\nu_2 - 1)\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right) \qquad (165)$$

Dann folgt aus (162), (161), (163)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c_2'} &= \frac{1}{f_1} \\ c_3 &= c_2' - e \\ \frac{1}{c_4'} - \frac{1}{c_3} &= \frac{1}{f_2} \end{aligned}\right\} \qquad (166)$$

Aus (166) folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c_2'} &= \frac{1}{f_1} \\ \frac{1}{c_3} &= \frac{1}{f_1 - e} \\ \frac{1}{c_4'} &= \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1 - e} \end{aligned}\right\} \qquad (167)$$

Die noch fehlenden Grössen c lassen sich mit Hilfe der optischen Invariante Q ermitteln. Aus (157) folgt, wenn man (160) berücksichtigt und $c_1 = \infty$ setzt:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{c_1'} = \frac{1}{v_1 r_1}$$

und also:

$$\frac{1}{c_1'} = \frac{1}{r_1}\,\frac{v_1 - 1}{r_1}$$

Dann ist nach (161)

$$\frac{1}{c_2} = \frac{1}{r_1}\,\frac{v_1 - 1}{v_1}$$

Aus (157) folgt:

$$v_2\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{c_3'}\right) = \frac{1}{r_3} - \frac{1}{f_1 - e}$$

$$\frac{1}{c_3'} = \frac{1}{r_3}\cdot\frac{v_2 - 1}{v_2} + \frac{1}{v_2(f_1 - e)}$$

Also ergibt sich aus (161):

$$\frac{1}{c_4} = \frac{1}{r_3} \cdot \frac{v_2 - 1}{v_2} + \frac{1}{v_2 (f_1 - e)}$$

Für die reziproken Werte der Grössen $c_\varkappa$ haben sich mithin folgende Werte ergeben:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{c_1} = 0 \\
&\frac{1}{c_1'} = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{v_1 - 1}{v_1} \\
&\frac{1}{c_2} = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{v_1 - 1}{v_1} \\
&\frac{1}{c_2'} = \frac{1}{f_1} \\
&\frac{1}{c_3} = \frac{1}{f_1 - e} \\
&\frac{1}{c_3'} = \frac{1}{r_3} \cdot \frac{v_2 - 1}{v_2} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{1}{f_1 - e} \\
&\frac{1}{c_4} = \frac{1}{r_3} \cdot \frac{v_2 - 1}{v_2} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{1}{f_1 - e} \\
&\frac{1}{c_4'} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1 - e}
\end{aligned}\right\} \quad (167)$$

Setzt man die Werte aus (167) ein in (154), (155), (156), (157), so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= 1 \\
A_2 &= 1 \\
A_3 &= \frac{f_1 - e}{f_1} \\
A_4 &= \frac{f_1 - e}{f_1}
\end{aligned}\right\} \quad (168)$$

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{r_1} \cdot \frac{v_1 - 1}{v_1^2} \\ B_2 &= \frac{1}{f_1} - \frac{1}{r_1} \cdot \frac{v_1 - 1}{v_1^2} \\ B_3 &= \frac{1}{r_3} \cdot \frac{v_2 - 1}{v_2^2} - \frac{1}{f_1 - e} \cdot \frac{v_2^2 - 1}{v_2^2} \\ B_4 &= \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1 - e} \cdot \frac{v_2^2 - 1}{v_2^2} - \frac{1}{v_3} \cdot \frac{v_2 - 1}{v_2^2} \end{aligned}\right\} \quad (169)$$

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \\ C_3 &= \frac{e f_1}{f_1 - e} \\ C_4 &= \frac{e f_1}{f_1 - e} \end{aligned}\right\} \quad (170)$$

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{r_1} \\ Q_2 &= \frac{1}{r_1} - \frac{1}{f_1} \\ Q_3 &= \frac{1}{r_3} - \frac{1}{f_1 - e} \\ Q_4 &= \frac{1}{r_4} - \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1 - e} \end{aligned}\right\} \quad (171)$$

Aus (168), (169), (170), (171) ergeben sich folgende Ausdrücke.

$$\left.\begin{aligned} A_1^2 B_1 Q_1 &= \frac{1}{r_1^2} \cdot \frac{v_1 - 1}{v_1^2} \\ A_2^2 B_2 Q_2 &= \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{f_1}\right)\left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{r_1} \cdot \frac{v_1 - 1}{v_1^2}\right) \\ A_3^2 B_3 Q_3 &= \\ &\left(\frac{f_1 - e}{f_1}\right)^2 \left(\frac{1}{v_3} - \frac{1}{f_1 - e}\right)\left(\frac{1}{r_3} \frac{v_2 - 1}{v_2^2} - \frac{1}{f_1 - e} \cdot \frac{v_2^2 - 1}{v_2^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (172)$$

$$A_4^2 B_4 Q_4 = \left.\begin{array}{l} \left(\frac{f_1-e}{f_1}\right)^2 \left(\frac{1}{r_4} - \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1-e}\right)\left(\frac{1}{f_2} + \right. \\ \left. \frac{1}{f_1-e} \cdot \frac{v_2^2-1}{v_2^2} - \frac{1}{r_3}\frac{v_2-1}{v_2^2}\right) \end{array}\right\} \quad (172)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 + A_1^2 C_1 Q_1 = 1 \\ 1 + A_2^2 C_2 Q_2 = 1 \\ 1 + A_3^2 C_3 Q_3 = 1 + \frac{e\,(f_1-e)}{f_1}\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{f_1-e}\right) \\ 1 + A_4^2 C_4 Q_4 = 1 + \frac{e\,(f_1-e)}{f_1}\left(\frac{1}{r_4} - \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1-e}\right) \end{array}\right\} \quad (173)$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1^4 B_1 Q_1^2 = \frac{1}{r_1^3} \cdot \frac{v_1-1}{v_1^2} \\ A_2^4 B_2 Q_2^2 = \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{f_1}\right)^2 \left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{r_1} \cdot \frac{v_1-1}{v_1^2}\right) \\ A_3^4 B_3 Q_3^2 = \\ \quad \frac{f_1-e}{f_1}\Big)^4 \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{f_1-e}\right)^2 \left(\frac{1}{r_3} \cdot \frac{v_2-1}{v_2^2} - \frac{1}{f_2-e} \cdot \frac{v_2^2-1}{v_2^2}\right) \\ A_4^4 B_4 Q_4^2 = \\ \quad \left(\frac{f_1-e}{f_1}\right)^4 \left(\frac{1}{r_4} - \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1-e}\right)^2 \left(\frac{1}{f_2} + \right. \\ \quad \left. \frac{1}{f_1-e} \cdot \frac{v_2^2-1}{v_2^2} - \frac{1}{r_3} \cdot \frac{v_2-1}{v_2^2}\right) \end{array}\right\} \quad (174)$$

Setzt man die Ausdrücke (172), (173), (174) in Gleichung (153) ein, setzt man ferner zur Abkürzung:

$$\left.\begin{array}{l} \varrho_1 = \frac{v_1-1}{v_1^2} \\ \varrho_2 = \frac{v_2-1}{v_2^2} \\ \varrho_3 = \frac{v_2^2-1}{v_2^2} \end{array}\right\} \quad (175)$$

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{f_1 - e}{f_1} \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{f_1 - 1}\end{aligned}\right\} \qquad (176)$$

so erhält man für $x_1$ folgenden Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = {} & \frac{1}{r_1^2}\varrho_1 + \left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{r_1}\varrho_1\right)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{f_1}\right) + \\ & \varepsilon_1^2\left(\frac{1}{r_3}\varrho_2 - \varepsilon_2\varrho_3\right)\left(\frac{1}{r_3} - \varepsilon_2\right)\left[1 + e\,\varepsilon_1\left(\frac{1}{r_3} - \varepsilon_2\right)\right] + \\ & \varepsilon_1^2\left(\frac{1}{f_2} + \varepsilon_2\varrho_3 - \frac{1}{r_3}\varrho_2\right)\left(\frac{1}{r_4} - \frac{1}{f_2} - \varepsilon_2\right)\left[1 + \right. \\ & \left. \varepsilon_1\, e\left(\frac{1}{r_4} - \frac{1}{f_2} - \varepsilon_2\right)\right] : \frac{1}{r_1^3}\varrho_1 + \\ & \left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{r_1}\varrho_1\right)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{f_1}\right)^2 + \varepsilon_1^4\left(\frac{1}{r_3}\varrho_2 - \varepsilon_2\varrho_3\right) \cdot \\ & \left(\frac{1}{r_3} - \varepsilon_2\right)^2 + \varepsilon_1^4\left(\frac{1}{f_2} + \varepsilon_2\varrho_3 - \frac{1}{r_3}\varrho_2\right)\left(\frac{1}{r_4} - \frac{1}{f_2} - \varepsilon_2\right)^2 \end{aligned}\right\} \qquad (177)$$

In Gleichung (177) sind $r_1$ und $r_2$ zwei voneinander unabhängige Variable. Nimmt man aber jetzt $f_1$ als konstant an, so kann nur noch einer der beiden Radien z. B. $r_1$ als unabhängig aufgefasst werden, während $r_2$ bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\frac{1}{f_1} = (v_1 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{f_1} \cdot \frac{1}{v_1 - 1} \qquad (178)$$

Analog erhält man:

$$\frac{1}{r_4} = \frac{1}{r_3} - \frac{1}{f_2} \cdot \frac{1}{v_2 - 1} \qquad (179)$$

wo $f_2$ jetzt ebenfalls eine Konstante ist.

Zur Abkürzung setze man noch:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{v_1 - 1} + 1 &= \frac{v_1}{v_1 - 1} = \varrho_0 \\ \frac{1}{v_2 - 1} + 1 &= \frac{v_2}{v_2 - 1} = \varrho_0' \end{aligned}\right\} \qquad (180)$$

Berücksichtigt man (178), (179), (180), so wird der Zähler von $x_1$ (Gl. 177) nach längerer Umformung:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r_1}\left[\frac{1}{f_1}(1 + \varrho_0\,\varrho_1)\right] + \frac{1}{r_3{}^2}\left[\frac{1}{f_2}\cdot e\,\varepsilon_1{}^3(1 + 2\varrho'_0\,\varrho_2)\right] + \\ &\qquad \frac{1}{r_3}\left[\frac{1}{f_2}\cdot \varepsilon_1{}^2(1 + \varrho_0'\,\varrho_2) - \frac{1}{f_2{}^2}\,e\,\varepsilon_1{}^3(2\,\varrho_0' + \varrho_0'{}^2\,\varrho_2) - \right. \\ &\frac{1}{f_2}\,e\,\varepsilon_1{}^3\,\varepsilon_2(2\,\varrho_0'\,\varrho_3 + 2 + 2\,\varrho_0'\,\varrho_2)\Big] + \Big[-\frac{1}{f_1{}^2}\,\varrho_0 - \\ &\qquad \frac{1}{f_2{}^2}\,\varepsilon_1{}^2\,\varrho_0' - \frac{1}{f_2}\,\varepsilon_1{}^2\,\varepsilon_2(1 + \varrho_0'\,\varrho_3) + \frac{1}{f_2{}^3}\,e\,\varepsilon_1{}^3\,\varrho'^2 + \\ &\frac{1}{f_2{}^2}e\,\varepsilon_1{}^3\,\varepsilon_2(\varrho_0'{}^2\,\varrho_3 + 2\,\varrho_0') + \frac{1}{f_2}\,e\,\varepsilon_1{}^3\,\varepsilon_2{}^2(1 + 2\,\varrho_0'\varrho_3)\Big] \end{aligned} \qquad (181)$$

Ebenso wird der Nenner von (177) nach längerer Transformation:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r_1{}^2}\left[\frac{1}{f_1}(1 + 2\,\varrho_0\,\varrho_1)\right] + \frac{1}{r_1}\left[-\frac{1}{f_1{}^2}(2\,\varrho_0 + \varrho_0{}^2\,\varrho_1)\right] + \\ &\qquad \frac{1}{r_3{}^2}\left[\frac{1}{f_2}\,\varepsilon_1{}^4(1 + 2\,\varrho_0'\,\varrho_2)\right] + \frac{1}{r_3}\left[-\frac{1}{f_2{}^2}\,\varepsilon_1{}^4(2\,\varrho_0' + \right. \\ &\varrho_0'{}^2\,\varrho_2) - \frac{1}{f_2}\,\varepsilon_1{}^4\,\varepsilon_2(2 + 2\,\varrho_0'\,\varrho_3 + 2\,\varrho_0'\,\varrho_2)\Big] + \\ &\qquad \Big[\frac{1}{f_1{}^3}\,\varrho_0{}^2 + \frac{1}{f_2{}^3}\,\varepsilon_1{}^4\cdot\varrho_0'{}^2 + \frac{1}{f_2}\,\varepsilon_1{}^4\,\varepsilon_2(1 + 2\,\varrho_0'\,\varrho_3) + \\ &\qquad\qquad \frac{1}{f_2{}^2}\,\varepsilon_1{}^4\,\varepsilon_2(2\,\varrho_0' + \varrho_0'{}^2\,\varrho_3)\Big] \end{aligned}\right\} \qquad (182)$$

Man führe nun folgende Abkürzungen ein:

$$\alpha_1 = 1 + \varrho_0\,\varrho_1 \qquad \alpha_8 = 1 + \varrho_0'\,\varrho_3$$
$$\alpha_2 = 1 + 2\,\varrho_0'\,\varrho_2 \qquad \alpha_9 = \varrho_0'^2$$
$$\alpha_3 = 1 + \varrho_0'\,\varrho_2 \qquad \alpha_{10} = \varrho_0'^2\,\varrho_3 + 2\,\varrho_0$$
$$\alpha_4 = 2\,\varrho_0' + \varrho_0'^2\,\varrho_2 \qquad \alpha_{11} = 1 + 2\,\varrho_0'\,\varrho_3$$
$$\alpha_5 = 2\,\varrho_0'\,\varrho_3 + 2 + 2\,\varrho_0'\,\varrho_2 \qquad \alpha_{12} = 1 + 2\,\varrho_0\,\varrho_1$$
$$\alpha_6 = \varrho_0 \qquad \alpha_{13} = 2\,\varrho_0 + \varrho_0^2\,\varrho_1$$
$$\alpha_7 = \varrho_0' \qquad \alpha_{14} = \varrho_0^2$$

und ferner

$$\beta_1 = \frac{1}{f_1}\,\alpha_1$$

$$\beta_2 = \frac{1}{f_2}\,.\,e\,\varepsilon_1^3\,\alpha_2$$

$$\beta_3 = \frac{1}{f_2}\,\varepsilon_1^2\,\alpha_3 - \frac{1}{f_2^2}\,e\,\varepsilon_1^3\,\alpha_4 - \frac{1}{f_2}\,e\,\varepsilon_1^3\,\varepsilon_2\,\alpha_5$$

$$\beta_4 = -\frac{1}{f_1^2}\,\alpha_6 - \frac{1}{f_2^2}\,\varepsilon_1^2\,\alpha_7 - \frac{1}{f_2}\,\varepsilon_1^2\,\varepsilon_2\,\alpha_8 + \frac{1}{f_2^3}\,e\,\varepsilon_1^3\,\alpha_9 + \frac{1}{f_2^2}\,e\,\varepsilon_1^3\,\varepsilon_2\,\alpha_{10} + \frac{1}{f_2}\,e\,\varepsilon_1^3\,\varepsilon_2^2\,\alpha_{11}$$

$$\beta_5 = \frac{1}{f_1}\,\alpha_{12}$$

$$\beta_6 = -\frac{1}{f_1^2}\,\alpha_{13}$$

$$\beta_7 = \frac{1}{f_2}\,\varepsilon_1^4\,\alpha_2$$

$$\beta_8 = -\frac{1}{f_2^2}\,\varepsilon_1^4\,\alpha_4 - \frac{1}{f_2}\,\varepsilon_1^4\,\varepsilon_2\,\alpha_5$$

$$\beta_9 = \frac{1}{f_1^3}\,\alpha_{14} + \frac{1}{f_2^3}\,\varepsilon_1^4\,\alpha_9 + \frac{1}{f_2}\,\varepsilon_1^4\,\varepsilon_2^2\,\alpha_{11} + \frac{1}{f_2^2}\,\varepsilon_1^4\,\varepsilon_2\,\alpha_{10}$$

Dann berechnet sich der Ort des [M. B.] im Objektraum aus der Gleichung:

$$x_1 = \frac{\frac{1}{r_1}\beta_1 + \frac{1}{r_3^2}\beta_2 + \frac{1}{r_3}\beta_3 + \beta_4}{\frac{1}{r_1^2}\beta_5 + \frac{1}{r_1}\beta_6 + \frac{1}{r_3^2}\beta_7 + \frac{1}{r_3}\beta_8 + \beta_9}$$

Wir sind also zu folgendem Resultat gelangt:

Um in einem System aus zwei dünnen, in Luft befindlichen Linsen, die sich im Abstande e voneinander befinden, den [M. B.] im Objektraum zu ermitteln, verfahre man folgendermassen:

Aus den Brechungsexponenten $v_1$ und $v_2$ der beiden Linsesubstanzen berechne man folgende Grössen:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_0 &= \frac{v_1}{v_1 - 1} & \varrho_2 &= \frac{v_2 - 1}{v_2^2} \\ \varrho_0' &= \frac{v_2}{v_2 - 1} & \varrho_3 &= \frac{v_2^2 - 1}{v_2^2} \\ \varrho_1 &= \frac{v_1 - 1}{v_1^2} \end{aligned}\right\} \qquad (183)$$

Aus $f_1$, $f_2$, e berechne man:

$$\varepsilon_1 = \frac{f_1 - e}{f_1} \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{f_1 - e} \qquad (183\,a)$$

Aus den Grössen $\varrho$ berechne man:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 + \varrho_0 \varrho_1 & \alpha_8 &= 1 + \varrho_0' \varrho_3 \\ \alpha_2 &= 1 + 2\,\varrho_0' \varrho_2 & \alpha_9 &= \varrho_0'^2 \\ \alpha_3 &= 1 + \varrho_0' \varrho_2 & \alpha_{10} &= \varrho'^2 \varrho_3 + 2\,\varrho_0 \\ \alpha_4 &= 2\,\varrho_0' + \varrho_0'^2 \varrho_2 & \alpha_{11} &= 1 + 2\,\varrho_0' \varrho_3 \\ \alpha_5 &= 2\,\varrho_0' \varrho_3 + 2 + 2\,\varrho_0' \varrho_2 & \alpha_{12} &= 1 + 2\,\varrho_0 \varrho_1 \\ \alpha_6 &= \varrho_0 & \alpha_{13} &= 2\,\varrho_0 + \varrho_0^2 \varrho_1 \\ \alpha_7 &= \varrho_0' & \alpha_{14} &= \varrho_0^2, \end{aligned}\right\} \qquad (184)$$

wobei zu bemerken ist, dass die Grössen $\alpha$ nur von den beiden Brechungsexponenten $v_1$ und $v_2$ abhängen. Endlich berechne man noch die Grössen

$$\left.\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{1}{f_1}\,\alpha_1 \\
\beta_2 &= \frac{1}{f_2}\,e\,\varepsilon_1^3\,\alpha_2 \\
\beta_3 &= \frac{1}{f_2}\,\varepsilon_1^2\,\alpha_3 - \frac{1}{f_2^2}\,e\,\varepsilon_1^3\,\alpha_4 - \frac{1}{f_2}\,e\,\varepsilon_1^3\,\varepsilon_2\,\alpha_5 \\
\beta_4 &= -\frac{1}{f_1^2}\,\alpha_6 - \frac{1}{f_2^2}\,\varepsilon_1^2\,\alpha_7 - \frac{1}{f_2}\,\varepsilon_1^2\,\varepsilon_2\,\alpha_8 + \\
&\qquad \frac{1}{f_2^3}\,e\,\varepsilon_1^3\,\alpha_9 + \frac{1}{f_2^2}\,e\,\varepsilon_1^3\,\varepsilon_2\,\alpha_{10} + \frac{1}{f_2}\,e\,\varepsilon_1^3\,\varepsilon_2^2\,\alpha_{11} \\
\beta_5 &= \frac{1}{f_1}\,\alpha_{12} \\
\beta_6 &= -\frac{1}{f_1^2}\,.\,\alpha_{13} \\
\beta_7 &= \frac{1}{f_2}\,\varepsilon_1^4\,\alpha_2 \\
\beta_8 &= -\frac{1}{f_2^2}\,\varepsilon_1^4\,\alpha_4 - \frac{1}{f_2}\,\varepsilon_1^4\,\varepsilon_2\,\alpha_5 \\
\beta_9 &= \frac{1}{f_2^3}\,\alpha_{14} + \frac{1}{f_2^3}\,\varepsilon_1^4\,\alpha_9 + \frac{1}{f_2}\,\varepsilon_1^4\,\varepsilon_2^2\,\alpha_{11} + \\
&\qquad \frac{1}{f_2^2}\,\varepsilon_1^4\,\varepsilon_2\,\alpha_{10}
\end{aligned}\right\} \qquad (185)$$

Dann berechnet sich die Entfernung $x_1$ von der ersten Linsenfläche nach der Gleichung:

$$x_1 = \frac{\frac{1}{r_1}\,\beta_1 + \frac{1}{r_3^2}\,\beta_2 + \frac{1}{r_3}\,\beta_3 + \beta_4}{\frac{1}{r_1^2}\,\beta_5 + \frac{1}{r_1}\,\beta_5 + \frac{1}{r_3^2}\,\beta_7 + \frac{1}{r_3}\,\beta_8 + \beta_9} \qquad (186)$$

## § 3. Das Huygenssche und das Ramsdansche Okular.

Das Huygenssche Okular (Fig. 16) besteht bekanntlich aus zwei dünnen plankonvexen Linsen, dem Kollektiv K und dem Augenglase A, die beide ihre plane Seite dem Auge zuwenden. Ist $f_1$ die Brennweite des Kollektivs, $f_2$ die der Augenlinse, so ist:

$$f_1 = 2\, f_2 .$$

Die Brechungsexponenten der beiden Linsen sind gleich. Vom Objektiv ausgehende Strahlen würden sich in q schneiden, wenn qp in der Brennebene des Objektivs liegend gedacht ist, und wenn die Lichtstrahlen nicht vorher durch das Kollektiv abgelenkt werden würden. Die Voraussetzung, dass $c_1 = \infty$ ist, ist hier also nicht erfüllt. Infolge der Reziprozität des Lichtweges kann man aber annehmen, die Lichtstrahlen kämen von der Bildseite her, aus dem Unendlichen, denn die Augenlinse macht die Strahlen parallel. A ist also dann die vordere, K die hintere Linse und die Bedingung $c_1 = \infty$ ist jetzt erfüllt. Zufolge der früheren Bezeichnungsweise sind dann die Radien der Reihe nach $r_1 = \infty$, $r_2$, $r_3 = \infty$, $r_4$. Nach Gleichung (186) berechnet sich dann die Entfernung des [M. B.] im Objektraum von der Augenlinse aus der Gleichung:

$$x_1 = \frac{\beta_4}{\beta_9} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (187)$$

Beim Huygensschen Okular ist also der Ort des [M. B.] unabhängig von den Radien.

Wir wollen jetzt den Ort des [M. B.] im Objektraum für folgendes Okular berechnen:

| Kollektiv | Entf. der beiden Linsen | Augenlinse |
|---|---|---|
| $f_1 = 2$ | $e = {}^3/_2$ | $f_2 = 1$ |
| $r_3 = \infty$ | | $r_1 = \infty$ |
| $v = 1{,}6$ | | $v = 1{,}6$ |

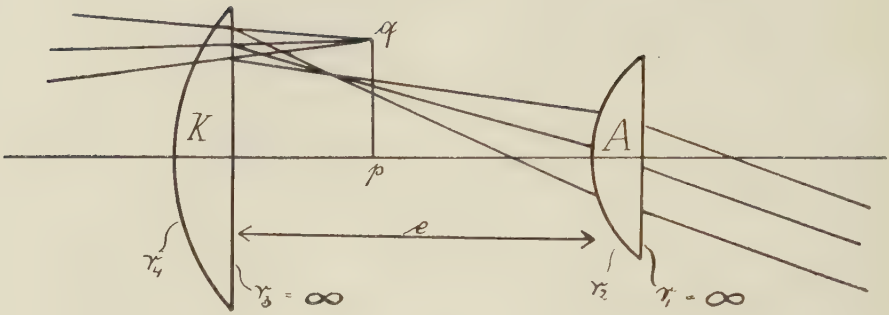


Fig. 16

Da die Brechungsexponenten der beiden Linsen gleich sind, so ist nach (183):

$$\varrho_0 = \varrho_0' \,,\; \varrho_1 = \varrho_2$$

und man erhält:

$$\log \varrho_0 = 0{,}42\,597.2$$
$$\log \varrho_1 = 0{,}36\,991 - 1$$
$$\log \varrho_3 = 0{,}78\,488 - 1$$

Aus (184) berechnen sich die Werte:

$$\log \alpha_6 = 0{,}42\,597.2$$
$$\log \alpha_7 = 0{,}42\,597.2$$
$$\log \alpha_8 = 0{,}41\,913$$
$$\log \alpha_9 = 0{,}85\,194.2$$
$$\log \alpha_{10} = 0{,}98\,517.8$$
$$\log \alpha_{11} = 0{,}62\,839$$
$$\log \alpha_{14} = 0{,}85\,194.2$$

Aus (183a) folgt:

$$\varepsilon_1 = -e \,, \qquad \varepsilon_2 = -\frac{1}{e}$$

Aus (185) folgen dann die beiden Grössen:

$$\beta_4 = -3{,}3231$$
$$\beta_4 = 8{,}2363$$

Für $x_1$ erhält man also aus Gleichung (187):

$$x_1 = -0{,}4034.$$

Beim Huygensschen Okular ist die Entfernung des Augenpunktes von der letzten brechenden Fläche d. h. also von der Planfläche des Augenglases gleich $^1/_4$ f, wo f die Gesamtbrennweite des Okulars ist. Diese Gesamtbrennweite berechnet sich aus den Einzelbrennweiten und der Entfernung e der beiden Linsen nach der Gleichung:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{e}{f_1 f_2}$$

Man erhält:

$$f = {}^4/_3.$$

Der Augenabstand von der Planfläche des Augenglases ist demnach $^1/_4\, f = 0{,}33\ldots$, also angenähert gleich dem absoluten Betrage von $x_1$. Wir kommen also zu folgendem Resultat:

Beim Huygensschen Okular fällt der Mittelpunkt der natürlichen Blende mit dem Augenpunkt zusammen.

Das Ramsdansche Okular besteht aus zwei plankonvexen Linsen, dem Kollektiv A — siehe Fig. 17 — und dem Augenglase B, die beide die konvexe Seite einander zuwenden. Strahlen, die vom Objektiv kommen und sich in einem Punkt q der Brennebene des Objektivs vereinigen, gelangen in das Kollektiv A. Auch beim Ramsdanschen Okular ist also die Bedingung $c_1 = \infty$ (siehe oben) zunächst nicht erfüllt. Jedoch werden auch hier die Lichtstrahlen durch das Augenglas B parallel gemacht.

Wie beim Huygenschen Okular kann man also auch hier infolge der Reziprozität des Lichtweges annehmen, die Strahlen kämen von der Bildseite her aus dem Unendlichen, die Bedingung $c_1 = \infty$ ist also jetzt erfüllt. Die Radien sind der Reihe nach $r_1 = \infty$, $r_2$, $r_3$, $r_4 = \infty$. Kollektiv und Augenglas

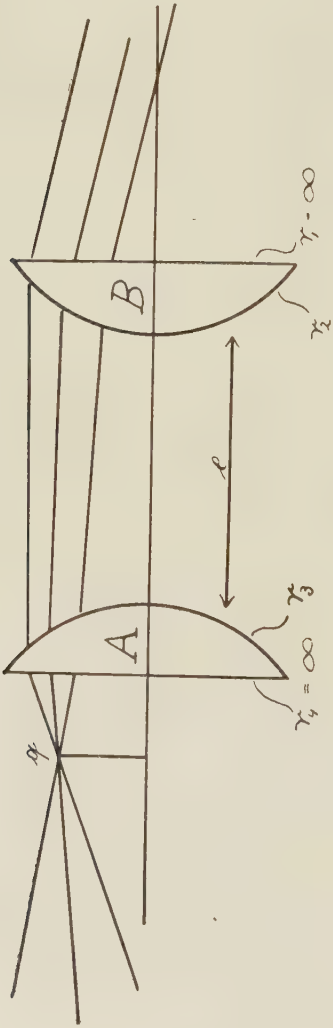


Fig. 17

haben bekanntlich dieselbe Brennweite f und denselben Brechungsexponenten v.

Als Beispiel legen wir folgende Daten zugrunde:

| Augenglas | Entf. der beiden Linsen | Kollektiv |
|---|---|---|
| $r_1 = \infty$ | $e = 1$ | $r_3 = 0{,}6$ |
| $f = 1$ | | $f = 1$ |
| $v = 1{,}6$ | | $v = 1{,}6$ |

Da die Brechungsexponenten gleich sind, so ist nach (183)

$$\varrho_0 = \varrho_0' ; \qquad \varrho_1 = \varrho_2$$

und man erhält:

$$\log \varrho_0 = 0{,}42\,597.2$$
$$\log \varrho_1 = 0{,}36\,991 - 1$$
$$\log \varrho_3 = 0{,}78\,488 - 1$$

Aus (184) ergeben sich die Werte:

$$\alpha_2 = 2{,}2500 \qquad \alpha_8 = 2{,}6250$$
$$\alpha_3 = 1{,}6250 \qquad \alpha_9 = 7{,}1112$$
$$\alpha_4 = 7{,}0001 \qquad \alpha_{10} = 9{,}6667$$
$$\alpha_5 = 6{,}5000 \qquad \alpha_{11} = 4{,}2500$$
$$\alpha_6 = 2{,}6667 \qquad \alpha_{14} = 7{,}1112$$
$$\alpha_7 = 2{,}6667$$

Aus (183a) folgt:

$$\varepsilon_1 = 0 , \qquad \varepsilon_2 = \infty$$

Aus (185) folgt $\beta_2 = 0$; die Grössen $\beta_3$, $\beta_4$, $\beta_7$, $\beta_8$, $\beta_9$ werden dagegen unbestimmt. Um dieser Schwierigkeit zu entgehen, verkleinern wir den Abstand der beiden Linsen etwas, setzen also $e = 0{,}9$. Diese Verringerung des Abstandes geschieht bekanntlich auch in der Praxis, wo-

durch bewirkt wird, dass das beobachtende Auge die auf dem Kollektiv sich ablagernden Staubteilchen nicht sieht und zweitens, dass der Augengunkt, der für $e = 1$ streng im Scheitel des Augenglases liegt, etwas von der Linse fortrückt. Aus $e = 0{,}9$ folgt nach (183a)

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{10}, \varepsilon_2 = 10$$

Dann ergeben sich aus (185) die Werte:

| | |
|---|---|
| $\beta_2 = 0{,}002\,025$ | $\beta_7 = 0{,}000\,225$ |
| $\beta_3 = -0{,}063\,175$ | $\beta_8 = -0{,}007\,200$ |
| $\beta_4 = -2{,}479\,966$ | $\beta_9 = 7{,}164\,078$ |

Gleichung (186) nimmt im vorliegenden Fall die Form an:

$$x_1 = \frac{\frac{1}{r_3^2}\beta_2 + \frac{1}{r_3}\beta_3 + \beta_4}{\frac{1}{r_3^2}\beta_7 + \frac{1}{r_3}\beta_8 + \beta_9} \quad \ldots \quad (188)$$

woraus sich ergibt:

$$x_1 = -0{,}3606$$

Der [M. B.] liegt also wie der Augenpunkt um einen geringen Betrag vor der Planfläche der Augenlinse. Wir kommen also zu folgendem Resultat:

Auch beim Ramsdenschen Okular fällt der Mittelpunkt der natürlichen Blende mit dem Augenpunkt zusammen.

Daher erklärt sich wohl zum grössten Teil die gute Wirkung sowohl des Huygensschen wie auch des Ramsdenschen Okulars; denn der Umstand, dass der Mittel-

punkt der natürlichen Blende und der Augenpunkt zusammenfallen, bewirkt, dass gerade diejenigen Strahlen in das Auge dringen, die durch die Spitzen der Kaustiken d. h. durch Punkte höherer Strahlenvereinigung gehen.

## § 4. Das symmetrische Doublet.

Für jedes symmetrische Doublet gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} r_4 &= -r_1 \\ r_3 &= -r_2 \\ f_1 &= \phantom{-}f_2 \\ \nu_1 &= \phantom{-}\nu_2 \end{aligned}$$

Setzt man für $r_3$ den Wert $-r_3$ in Gleichung (186) ein, so folgt:

$$x_1 = \frac{\frac{1}{r_1}\beta_1 + \frac{1}{r_2^2}\beta_2 - \frac{1}{r_2}\beta_3 + \beta_4}{\frac{1}{r_1}\beta_5 + \frac{1}{r_1}\beta_6 + \frac{1}{r_2^2}\beta_7 - \frac{1}{r_2}\beta_8 + \beta_9} \qquad (189)$$

Es ist:

$$\frac{1}{f_1} = (\nu_1 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Setzt man $f_1 = 1$, so ist:

$$1_1 = (\nu - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

oder

$$-\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\nu_1 - 1} - \frac{1}{r_1} = \varrho_4 - \frac{1}{r_1}, \qquad (190)$$

wenn man setzt:

$$\varrho_4 = \frac{1}{v_1 - 1} \tag{191}$$

Diesen Wert für $-\frac{1}{r_2}$ führe man in Gleichung (189) ein und setze:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \beta_2 \\
a_2 &= \beta_1 - 2\,\varrho_4\,\beta_2 - \beta_3 \\
a_3 &= \varrho_4{}^2\,\beta_2 + \varrho_4\,\beta_3 + \beta_4 \\
a_4 &= \beta_5 + \beta_7 \\
a_5 &= \beta_6 - 2\,\varrho_4\,\beta_7 - \beta_8 \\
a_6 &= \varrho_4{}^2\,\beta_7 + \varrho_4\,\beta_8 + \beta_9\,,
\end{aligned}$$

dann erhält man nach einigen Umformungen aus Gleichung (189):

$$x_1 = \frac{\frac{1}{r_1{}^2}\alpha_1 + \frac{1}{r_1}\alpha_2 + \alpha_3}{\frac{1}{r_1{}^2}\alpha_4 + \frac{1}{r_1}\alpha_5 + \alpha_6} \tag{192}$$

Da $f_1 = f_2 = 1$ angenommen ist, so folgt aus (183a):

$$\varepsilon_1 = 1 - e\,, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{1-e} \tag{193}$$

Will man also bei einem symmetrischen Doublet die Lage des [M. B.] im Objektraum bestimmen, so berechne man zunächst aus dem Brechungsexponenten die Gössen:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho_0 &= \frac{v_1}{v_1 - 1} & \varrho_3 &= \frac{v_1{}^2 - 1}{v_1{}^2} \\
\varrho_1 &= \frac{v_1 - 1}{v_1{}^2} & \varrho_4 &= \frac{1}{v_1 - 1}
\end{aligned}\right\} \tag{194}$$

und die Grössen:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= 1 + \varrho_0\,\varrho_1 & \alpha_8 &= 1 + \varrho_0'\,\varrho_3 \\
\alpha_2 &= 1 + 2\,\varrho_0'\varrho_2 & \alpha_9 &= \varrho_0'^2 \\
\alpha_3 &= 1 + \varrho_0'\,\varrho_2 & \alpha_{10} &= \varrho_0'^2\,\varrho_3 + 2\,\varrho_0 \\
\alpha_4 &= 2\,\varrho_0' + \varrho_0'^2\,\varrho_2 & \alpha_{11} &= 1 + 2\,\varrho_0'\,\varrho_3 \\
\alpha_5 &= 2\,\varrho_0'\,\varrho_3 + 2 + 2\,\varrho_0'\,\varrho_2 & \alpha_{12} &= 1 + 2\,\varrho_0\,\varrho_1 \\
\alpha_6 &= \varrho_0 & \alpha_{13} &= 2\,\varrho_0 + \varrho_0^2\,\varrho_1 \\
\alpha_7 &= \varrho_0' & \alpha_{14} &= \varrho_0^2
\end{aligned}\right\} \quad (195)$$

Aus der Entfernung e der beiden Linsen berechne man die Grössen

$$\varepsilon_1 = 1 - e\,, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{1-e} \quad . \quad . \quad . \quad (196)$$

Ferner bestimme man die Werte:

$$\left.\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 \\
\beta_2 &= e\,.\,\varepsilon_1^3\,\alpha_2 \\
\beta_3 &= \varepsilon_1^2\,\alpha_3 - e\,\varepsilon_1^3\,\alpha_4 - e\,\varepsilon_1^3\,\varepsilon_2\,\alpha_5 \\
\beta_4 &= -\alpha_6 - \varepsilon_1^2\,\alpha_7 - \varepsilon_1^2\,\varepsilon_2\,\alpha_8 + e\,\varepsilon_1^3\,\alpha_9 + e\,\varepsilon_1^3\,\varepsilon_2\,\alpha_{10} \\
&\quad + e\,\varepsilon_1^3\,\varepsilon_2^2\,\alpha_{11} \\
\beta_5 &= \alpha_{12} \\
\beta_6 &= -\alpha_{12} \\
\beta_7 &= \varepsilon_1^4\,\alpha_2 \\
\beta_8 &= -\varepsilon_1^4\,\alpha_4 - \varepsilon_1^4\,\varepsilon_2\,\alpha_5\,, \\
\beta_9 &= \alpha_{14} + \varepsilon_1^4\,\alpha_9 + \varepsilon_1^4\,\varepsilon_2^2\,\alpha_{11} + \varepsilon_1^4\,\varepsilon_2\,\alpha_{10}
\end{aligned}\right\} \quad (197)$$

die aus (185) dadurch entstehen, dass man $f_1 = f_2 = 1$ setzt.

Endlich berechne man noch die Grössen:

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= \beta_2 \\
a_2 &= \beta_1 - 2\,\varrho_4\,\beta_2 - \beta_3 \\
a_3 &= \varrho_4^2\,\beta_2 + \varrho_4\,\beta_3 + \beta_4 \\
a_4 &= \beta_5 + \beta_7 \\
a_5 &= \beta_6 - 2\,\varrho_4\,\beta_7 - \beta_8 \\
a_6 &= \varrho_4^2\,\beta_7 + \varrho_4\,\beta_8 + \beta_9
\end{aligned}\right\} \quad (198)$$

Die Entfernung $x_1$ des [M. B.] im Objektraum von der ersten Linsenfläche ergibt sich dann aus:

$$x_1 = \frac{\frac{1}{r_1^2} a_1 + \frac{1}{r_1} a_2 + \alpha_3}{\frac{1}{r_1^2} a_4 + \frac{1}{r_1} a_5 + \alpha_6} \qquad (199)$$

Als Beispiel wählen wir:

$r_1 = 0{,}6 \qquad e = 0{,}1$
$v_1 = 1{,}6$
$f_1 = 1$
u. symmetrisch

Aus (194) erhält man:

$\log \varrho_0 = 0{,}42597.2 \qquad \log \varrho_3 = 0{,}78488 - 1$
$\log \varrho_1 = 0{,}36991 - 1 \qquad \log \varrho_4 = 0{,}22185.9$

Aus (195) folgt:

$\alpha_1 = 1{,}6250 \qquad \alpha_8 = 2{,}6250$
$\alpha_2 = 2{,}2500 \qquad \alpha_9 = 7{,}1112$
$\alpha_3 = 1{,}6250 \qquad \alpha_{10} = 9{,}6667$
$\alpha_4 = 7{,}0001 \qquad \alpha_{11} = 4{,}2500$
$\alpha_5 = 6{,}5000 \qquad \alpha_{12} = 2{,}2500$
$\alpha_6 = 2{,}6667 \qquad \alpha_{13} = 7{,}0001$
$\alpha_7 = 2{,}6667 \qquad \alpha_{14} = 7{,}1112.$

Aus (196) folgt:

$$\varepsilon_1 = \frac{9}{10}, \quad \varepsilon_2 = \frac{10}{9}$$

Aus (197) folgt:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1{,}6250 & \beta_6 &= -\,7{,}0001 \\ \beta_2 &= 0{,}1640 & \beta_7 &= 1{,}4762 \\ \beta_3 &= 0{,}2794 & \beta_8 &= -\,9{,}3310 \\ \beta_4 &= -\,5{,}5053 & \beta_9 &= 22{,}2662 \\ \beta_5 &= 2{,}2500 \end{aligned}$$

Aus (198) folgt:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 0{,}1640 & a_4 &= 3{,}7262 \\ a_2 &= 0{,}7988 & a_5 &= -\,2{,}5899 \\ a_3 &= -\,4{,}5839 & a_6 &= 10{,}8150 \end{aligned}\right\} \quad (200)$$

Nach (199) ergibt sich dann:

$$x_1 = -\,0{,}1660,$$

d. h. der [M. B.] liegt 0,166 Einheiten — die Grösse f als Einheit genommen — vor der ersten Linse.

Für die Praxis kommen hauptsächlich solche symmetrischen Doublets in Betracht, bei denen $r_1$ angenähert gleich $r_2$ und also auch $r_3$ gleich $r_4$ ist, d. h. also Doublets in Meniskenform. Es wird sich weiter unten zeigen, dass für solche symmetrischen Doublets der [M. B.] mit dem Symmetriepunkt zusammenfällt.

Um diese Verhältnisse noch etwas genauer zu untersuchen, erschien es dem Verfasser geboten, festzustellen, wie sich der Ort des [M. B.] im Objektraum ändert, wenn man den Radius $r_1$ der ersten brechenden Fläche als variable Grösse auffasst. In Gleichung (199) soll also jetzt $r_1$ als unabhängige, $x_1$ als abhängige Variable aufgefasst werden, die Grössen a dagegen werden als Konstante betrachtet, u. z. legen wir die Daten des soeben berechneten Beispiels zugrunde, sodass die Grössen a die Werte (200) haben. Lässt man $r_1$ das Intervall von $+\infty$ bis $-\infty$ durchlaufen, berechnet zu jedem Wert den zugehörigen von $x_1$, so erhält man Tabelle II. Extreme Lagen nimmt der [M. B.] im Objektraum ein für $r_1 = 11{,}57$ und $r_1 = 0{,}091$.

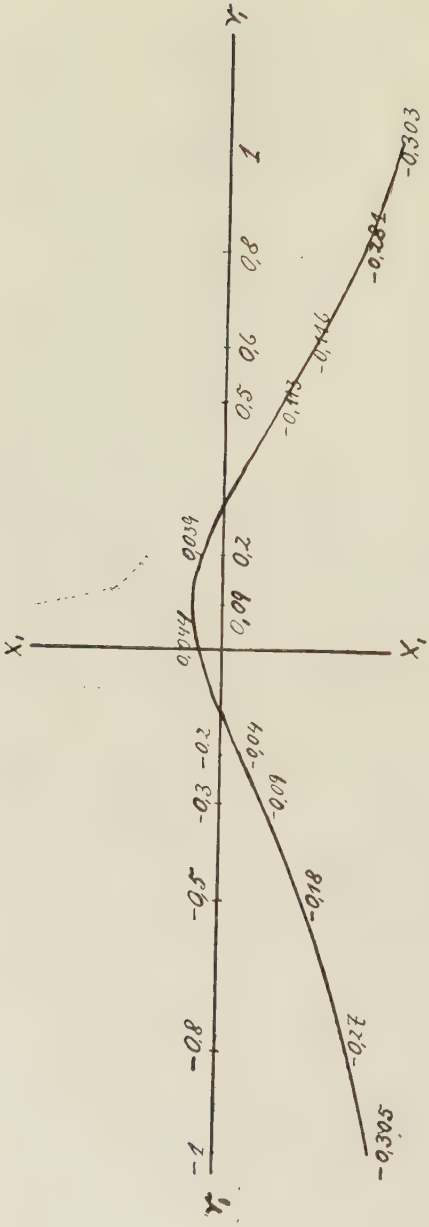


Fig. 18

**Tabelle II**

| Radius der I. brech. Fläche | Entfern. des [M.B.] im Objektraum v. d. I. Fläche |
|---|---|
| + ∞ | — 0,424 |
| + 100 | — 0,424 |
| + 11,574 | — 0,425 |
| + 10 | — 0,424 |
| + 5 | — 0,423 |
| + 2 | — 0,396 |
| + 1,5 | — 0,370 |
| + 1 | — 0,303 |
| + 0,8 | — 0,281 |
| + 0,6 | — 0,166 |
| + 0,5 | — 0,133 |
| + 0,3 | — 0,002 |
| + 0,295 | 0 |
| + 0,2 | + 0,039 |
| + 0,1 | + 0,055 |
| + 0,0909 | + 0,056 |
| $r_1$ sehr klein | + 0,044 |
| — 0,1 | + 0,009 |
| — 0,121 | 0 |
| — 0,2 | — 0,038 |
| — 0,3 | — 0,089 |
| — 0,5 | — 0,179 |
| — 0,8 | — 0,268 |
| — 1 | — 0,305 |
| — 2 | — 0,379 |
| — 5 | — 0,413 |
| — 10 | — 0,420 |
| — 100 | — 0,424 |
| — ∞ | — 0,424 |

Diskussion der Kurve:

In Fig. (18) ist die Kurve dargestellt, die man erhält, wenn man $r_1$ auf der Abscissenachse und $x_1$ auf der Ordinatenachse abträgt. Aus der Figur ersieht man folgendes: Bei einem symmetrischen Doublet, dessen erste Fläche — und also auch die letzte — plan ist, liegt der [M. B.] 0,424 Einheiten — die Brennweite gleich Eins genommen — vor der ersten Linse. Wird jetzt der Radius absolut genommen kleiner, so nähert sich der [M. B.] der ersten Linse. Für $r_1 = -0{,}121$ ist $x_1 = 0$, d. h. der [M. B.] liegt im Scheitel der ersten Linse. Wird jetzt $r_1$ noch kleiner, so wird $x_1$ positiv, der [M. B.] im Objektraum liegt zwischen den Linsen. Für sehr kleine Werte von $r_1$ ist $x_1 = 0{,}044$, d. h. der [M. B.] im Objektraum liegt 0,044 Einheiten hinter der ersten Linse. Nimmt jetzt $r_1$ positive Werte an, so rückt der [M. B.] im Objektraum zunächst noch näher zur zweiten Linse. Für $r_1 = 0{,}0909$ nimmt er eine extreme Lage ein; er befindet sich 0,056 Einheiten hinter der ersten Linse, also ungefähr im Symmetriepunkt des Doublets. Wächst $r_1$ noch mehr, so nähert sich der [M. B.] im Objektraum wieder der ersten Linse; für $r_1 = 0{,}295$ liegt er wieder in ihrem Scheitel. Wird $r_1$ noch grösser, so rückt der [M. B.] wieder vor die erste Linse und erreicht hierbei ein Extremum für $r_1 = 11{,}574$, $x_1$ ist dabei $-0{,}425$. Wächst $r_1$ noch mehr, so nähert sich der [M. B.] allmählich dem Werte $-0{,}424$, den er für $r_1 = +\infty$, d. h. für ein Doublet, dessen erste und letzte Fläche plan sind, erreicht.

Auffallend ist die Aehnlichkeit des Verhaltens des [M. B.] bei dem symmetrischen Doublet und bei einer dünnen Linse.

Spezielle Fälle:

Es soll nun noch für einige spezielle Fälle, in denen das symmetrische Doublet vorgeschriebene Form hat, die Lage des [M. B.] im Objektraum berechnet werden.

1. Die erste und letzte Fläche des Doublets sollen plan sein. Dann ist also $r_1 = \infty$ und $r_2 = -0{,}6$. Aus der Tabelle ergibt sich $x_1 = -0{,}424$, d. h. der [M. B.] liegt um etwa $^2/_5$ f vor der ersten Linse.

2. Die zweite und dritte Fläche sollen plan sein. Dann ist also: $r_2 = \infty$, $r_1 = 0{,}6$. Die Tabelle liefert $x_1 = -0{,}166$. Der [M. B.] im Objektraum liegt also etwa $^1/_6$ f vor der ersten Linse.

3. Das Doublet soll aus zwei gleichseitigen bikonvexen Linsen bestehen, sodass man hat: $r_1 = -r_2$. Aus der Gleichung

$$1 = (\nu_1 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

folgt dann $r_1 = 1{,}2$. Gleichung (199) liefert $x_1 = 0{,}338$. Der [M. B.] liegt mithin um $^1/_3$ f vor der ersten Fläche.

4. Es soll untersucht werden, wie das symmetrische Doublet beschaffen sein muss, damit der [M. P.] mit dem Symmetriepunkt identisch ist.

Diese Bedingung ist offenbar dann erfüllt, wenn der [M. B.] im Objektraum mit der Eintrittspupille einer im Symmetriepunkt gedachten Aperturblende zusammenfällt.

Die Brennweiten der beiden Einzellinsen seien gleich 1, die Brechungsexponenten ihrer Substanzen 1,6, ihre Entfernung voneinander gleich $^1/_{10}$. Die Eintrittspupille der im Symmetriepunkt befindlicken Aperturblende liegt dann 0,053 Einheiten hinter der ersten Linse. Aus (199) erhält man also als Bedingungsgleichung für den Radius $r_1$:

$$0{,}053 = \frac{a_1 + a_2 r_1 + a_3 r_1^2}{a_4 + a_5 r_1 + a_6 r_1^2}$$

Berücksichtigt man (200), so folgt hieraus:

$$r_1' = 0{,}133$$
$$r_1'' = 0{,}049.$$

Die zugehörigen Werte $r_2'$ und $r_2''$ ergeben sich aus der Gleichung:

$$1 = (v_1 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Man erhält:

$$r_2' = 0{,}170$$
$$r_2'' = 0{,}053.$$

Der Bedingung, dass der [M. B.] mit dem Symmetriepunkt identisch ist, genügen also die beiden symmetrischen Doublets:

| | |
|---|---|
| $r_1 = 0{,}133$ | $r_1 = 0{,}049$ |
| $r_2 = 0{,}170$ | $r_2 = 0{,}053$ |
| $v_1 = 1{,}6$ | $v_1 = 1{,}6$ |
| $f = 1$ | $f = 1$ |
| $e = 0{,}1$ | $e = 0{,}1$ |
| u. symmetr. | u. symmetr. |

Die beiden Doublets sind also positive Menisken, sodass man zu dem schon oben erwähnten Resultat kommt:

Bei einem symmetrischen Doublet ist der Mittelpunkt der natürlichen Blende dann mit dem Symmetriepunkt identisch, wenn das Doublet ein positiver Meniskus ist.

Vorliegende Arbeit, die ich der hohen philosophischen Fakultät der Universität Rostock als Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde vorzulegen mich beehre, entstand auf Anregung von Herrn Regierungsrat Dr. A. Gleichen, der es mir gestatten möge, ihm an dieser Stelle für das wohlwollende Interesse, das er meiner Arbeit stets entgegenbrachte, und für die vielen wichtigen Ratschläge, die er mir erteilte, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

## Lebenslauf.

Ich, Willy Hinrichs, wurde am 26. August 1884 zu Berlin geboren. Ich bin preußischer Staatsangehöriger und evangelischer Konfession. Meine Ausbildung erhielt ich auf der I. Realschule zu Berlin und auf der Friedrichs-Werderschen Oberrealschule ebendaselbst, die ich Ostern 1905 mit dem Zeugnis der Reife verließ, um mich an der Universität Berlin dem Studium der Mathematik und der exakten Naturwissenschaften zu widmen. Gleichzeitig besuchte ich die Kgl. Technische Hochschule zu Charlottenburg, um an Vorlesungen und Uebungen über angewandte Mathematik teilzunehmen. Die Promotionsprüfung bestand ich am 3. Februar 1910.

Ich nahm teil an den Vorlesungen und Uebungen folgender Herren Dozenten: Berlin: Blasius, Drude†, E. Fischer, Friedenthal, Frobenius, Gabriel, Hettner, Landau, Lasson, Lehmann-Filhés, Liebisch, Münch, Nernst, Paulsen†, Pfleiderer†, Planck, Pringsheim, Roethe, Rubens, Schur, Schwarz, Simmel, Stock, Wehnelt. Charlottenburg: Hettner, Scheffers, Zühlke.

Ihnen allen gilt mein aufrichtiger Dank.